PEMODELAN TINGKAT MORTALITAS INDONESIA

MENGGUNAKAN MODEL CBDX

Oleh:

Muhammad Alanna Daffa Ramadhani

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Indonesia

Abstract

Indonesia is one of the most populous countries in the world, with a population reaching 275,501,339 by the end of 2022. This population growth presents both opportunities and challenges for Indonesia's economic development. Mortality, as a fundamental factor in population growth, affects the number and age structure of the population. Therefore, accurate calculation of mortality rates is crucial for the government and the insurance industry in planning health and financial policies. This research aims to model mortality rates in Indonesia using the CBDX Model, a stochastic model that accounts for age, period, and cohort effects. The data used is the Central Death Rate data of Indonesia from 1950 to 2021, covering age ranges from 0 to 90 years. The methods used to estimate the model parameters are Sequential Maximum Likelihood and the Broyden Fletcher Goldfarb Shanno (BFGS) numerical method. Mortality rate modeling is conducted in two scenarios: without age grouping and with age grouping based on recommendations from the World

Health Organization (WHO). The results of the study indicate that the CBDX model can effectively model mortality rates in Indonesia, particularly for the adult age group, with a Mean Absolute Percentage Error (MAPE) below 10%, aligning with the CBDX model's objective to cover a broader adult age range. This model can be utilized by the government and the insurance industry to predict mortality rates and to plan better health and financial policies.

***Keywords**: Age, BFGS, Cohort, MAPE, Period, Sequential Maximum Likelihood.*

JEL Coded : *G22(Insurance), C52(Forecasting and Prediction Methods).*

I.Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Dinamika kependudukan Indonesia, yang menempati peringkat keempat dunia dengan jumlah penduduk lebih dari 275 juta jiwa (Bank Dunia, 2022), menawarkan peluang sekaligus tantangan besar bagi pembangunan ekonomi. Dalam konteks ini, mortalitas sebagai salah satu dari tiga pilar utama pertumbuhan penduduk disamping fertilitas dan migrasi memegang peran krusial. Tingkat mortalitas tidak hanya merefleksikan kondisi kesehatan dan kesejahteraan suatu populasi tetapi juga menjadi variabel fundamental dalam penilaian risiko untuk produk asuransi jiwa, anuitas, dan program pensiun (Kwon & Nguyen, 2019; Tsai & Kim, 2022). Proyeksi mortalitas yang akurat menjadi landasan bagi stabilitas keuangan perusahaan asuransi dan perencanaan fiskal pemerintah.

Evolusi pemodelan mortalitas telah bergeser dari pendekatan deterministik ke model stokastik yang mampu menangkap ketidakpastian. Setelah model perintis Lee-Carter (1992), keluarga model Cairns-Blake-Dowd (CBD) muncul sebagai kerangka kerja yang *powerful*. Model CBDX, yang diperkenalkan oleh Dowd et al. (2020), merupakan perkembangan terkini dalam keluarga ini. Model ini dirancang khusus untuk menangkap pola mortalitas kelompok usia dewasa pada rentang yang lebih luas. Keunggulan utama Model CBDX terletak pada penerapan *General Procedure* (GP) yang dikemukakan Hunt & Blake (2014). GP memastikan identifikasi fitur demografis (usia, periode, kohort) secara sistematis dan berurutan, sehingga mencegah kesalahan spesifikasi model.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengisi celah tersebut dengan memodelkan tingkat mortalitas Indonesia menggunakan Model CBDX. Secara spesifik, penelitian ini akan:

1. Mengonstruksi Model CBDX untuk data Indonesia.
2. Menganalisis performa model melalui dua skenario (dengan dan tanpa pengelompokan usia).
3. Membandingkan ketiga varian model (CBDX1, CBDX2, CBDX3) untuk mengidentifikasi yang terbaik.

II. Studi Literatur

2.1. Variabel Acak Waktu Hidup Masa Depan

Variabel acak waktu hidup masa depan T_x menyatakan sisa umur seseorang berusia x. Fungsi distribusi $F_x(n) = \Pr[T_x \leq n]$ merepresentasikan

probabilitas individu (x) meninggal sebelum mencapai usia $x+n$. Notasi aktuaria untuk $F_x(n)$ adalah ${}_nq_x$. Fungsi *survival* $S_x(n) = 1 - F_x(n) = \Pr[T_x > n]$ merepresentasikan probabilitas individu (x) bertahan hidup hingga usia $x+n$, dengan notasi aktuaria ${}_np_x$.

$$F_x(n) = \frac{F_0(x+n) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \tag{1}$$

$$S_x(n) = \frac{S_0(x+n)}{S_0(x)}$$

2.2. Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas merupakan alat pengukur risiko yang menunjukkan tingkat mortalitas setiap usia berdasarkan jumlah individu yang meninggal atau masih hidup. Komponen dasar tabel mortalitas meliputi $l_{x,t}$ (jumlah individu hidup pada usia x periode t), $d_{x,t}$ (jumlah individu meninggal antara usia x dan $x+1$ pada periode t), dan $L_{x,t}$ (jumlah individu terpapar risiko kematian).

$$d_{x,t} = l_{x,t} - l_{x+1,t} \tag{2.1}$$

$$q_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{l_{x,t}}$$

2.3. Ukuran Mortalitas

Force of Mortality (μ_x) merupakan laju kematian sesaat pada usia x. *Central Death Rate* (${}_nm_{x,t}$) didefinisikan sebagai nilai rata-rata berbobot dari *force of mortality* untuk usia x sampai $x+n$ pada periode t.

$$\mu_x = \lim_{dx \to 0^+} \frac{\Pr[T_0 \leq x+dx \mid T_0 > x]}{dx} \tag{2.2}$$

$$ {}_n m_{x,t} = \frac{{}_n d_{x,t}}{{}_n L_{x,t}} $$

$$ {}_n q_{x,t} = 1 - \exp\left(-n \times_n m_{x,t}\right) $$

2.4. General Procedure

General Procedure (GP) merupakan prosedur sistematis untuk membangun model mortalitas dengan mengidentifikasi fitur demografis signifikan dalam data mortalitas dan merepresentasikannya dalam bentuk parametrik. GP mencegah kesalahan pengalokasian efek usia-periode kepada efek kohort.

$$ \eta\left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}\right) = \alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \quad f^{(i)}(x;\theta^{(i)})\kappa_t^{(i)} + \gamma_{t-x} \tag{2.3} $$

2.5. Age-Period-Cohort Model

Model *Age-Period-Cohort* (APC) menghubungkan variabel respon dengan prediktor linier yang dependen terhadap variabel umur, periode, dan kohort.

$$ \eta_{x,t} = \alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \quad \beta_x^{(i)}\kappa_t^{(i)} + \gamma_{t-x} \tag{2.4} $$

2.6. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi probabilitas untuk variabel acak diskrit yang sering digunakan dalam analisis data frekuensi peristiwa langka.

$$ f(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, y = 0,1,2, \ldots \tag{2.5} $$

$$ E[Y] = \lambda, \text{Var}[Y] = \lambda $$

2.7. Metode Estimasi Maximum Likelihood

Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk mengestimasi parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \quad f(x_i; \theta) \tag{2.6}$$

$$l(\theta) = \ln\ L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \quad \ln\ f(x_i; \theta)$$

2.8. Metode Iterasi Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan non-linier.

$$p_{t+1} = p_t - G_t^{-1} g_t \tag{2.7}$$

2.9. Metode Quasi Newton

Metode Quasi Newton merupakan pengembangan metode Newton-Raphson yang menggunakan matriks aproksimasi Hessian.

$$E_i(p_{i+1} - p_i) = \nabla f(p_{i+1}) - \nabla f(p_i) \tag{2.8}$$

2.10. Metode Random Walk with Drift

Random Walk with Drift merupakan proses stokastik untuk pemodelan data time series.

$$y_t = y_{t-1} + (t-1)\mu + \varepsilon_t \tag{2.9}$$

$$\hat{y}_{t+1} = y_0 + t\mu$$

2.11. Mean Absolute Percentage Error

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) digunakan untuk mengukur akurasi model.

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| \times 100\% \quad (2.10)$$

III. Metodologi Penelitian

3.1. Model CBDX

Model CBDX merupakan pengembangan dari keluarga model Cairns-Blake-Dowd (CBD) yang dibentuk untuk memodelkan tingkat mortalitas dengan mempertimbangkan efek usia, periode, dan kohort. Model ini menerapkan *General Procedure* dengan asumsi jumlah kematian berdistribusi Poisson.

$$\log\left({}_n m_{x,t}\right) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{K} \beta_i(x)\kappa_i(t) + \gamma(c) \quad (3.1)$$

dimana $c = t - x$ merepresentasikan tahun kelahiran. Variabel respon berupa *Central Death Rate* ${}_n m_{x,t} = \frac{{}_n d_{x,t}}{{}_n L_{x,t}}$.

Model CBDX memiliki tiga varian:

CBDX1 ($K = 1$):

$$\log\left({}_n m_{x,t}\right) = \alpha(x) + \kappa_1(t) + \gamma(c) \quad (3.2)$$

CBDX2 ($K = 2$):

$$\log\left({}_n m_{x,t}\right) = \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + \gamma(c) \quad (3.3)$$

CBDX3 ($K = 3$):

$$\log\left({}_n m_{x,t}\right) = \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t) + \gamma(c) \quad (3.4)$$

dimana $\bar{x}$ dan σ^2 merupakan mean dan variansi dari rentang usia sampel.

3.2. Estimasi Parameter Model CBDX

Estimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_i(t)$, dan $\gamma(c)$ menggunakan metode *Sequential Maximum Likelihood* dengan asumsi ${}_nd_{x,t} \sim$ Poisson$({}_nL_{x,t} \cdot_n m_{x,t})$.

Fungsi log-likelihood untuk parameter $\Theta = \{\alpha, \kappa, \gamma\}$:

$$l(\alpha, \kappa, \gamma) = \sum_{t,x} \quad [{}_nd_{x,t} \log ({}_nm_{x,t}) - {}_nL_{x,t} \cdot_n m_{x,t}] + \text{constant} \quad (3.5)$$

a. Langkah 1: Estimasi $\alpha(x)$

$$\hat{\alpha}(x_j) = \ln \{\frac{\sum_{t=1}^{n_y} \quad ({}_nd_{x_j,t})}{\sum_{t=1}^{n_y} \quad ({}_nL_{x_j,t})}\} \quad (3.6)$$

b. Langkah 2: Estimasi $\kappa_i(t)$

Fungsi log-likelihood untuk κ:

$$l(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum_{j=1}^{n_a} \quad \sum_{t=1}^{n_y} \quad (3.7)$$

Estimasi dilakukan menggunakan metode BFGS.

c. Langkah 3: Estimasi $\gamma(c)$

$$\hat{\gamma}(c) = \log \{\frac{\sum_{t=1}^{n_y} \quad \sum_{j=1}^{n_a} \quad W_c(t,x_j)_n d_{x_j,t}}{\sum_{t=1}^{n_y} \quad \sum_{j=1}^{n_a} \quad W_c(t,x_j)_n L_{x_j,t} e^{\hat{\alpha}(x_j) + \hat{\kappa}_1(t) + (x_j - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x_j - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t)}}\} \quad (3.8)$$

dimana $W_c(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t - x = c \\ 0 & \text{jika } t - x \neq c \end{cases}$

3.3. Evaluasi Model CBDX

Setelah diperoleh nilai estimasi parameter, nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ dihitung:

$${}_n\hat{m}_{x,t} = \exp (\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t) + \hat{\gamma}(c)) \quad (3.9)$$

Evaluasi menggunakan MAPE:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} \left| \frac{{}_n m_{x,t} - {}_n \widehat{m}_{x,t}}{{}_n m_{x,t}} \right| \times 100\% \quad (3.10)$$

Tingkat mortalitas ${}_n q_{x,t}$ dihitung menggunakan:

$${}_n q_{x,t} = 1 - \exp\left(-n \times_n \widehat{m}_{x,t}\right) \quad (3.11)$$

3.4. Peramalan Tingkat Mortalitas

Parameter $\kappa_i(t)$ yang dependen terhadap waktu diramalkan menggunakan *Random Walk with Drift*:

$$\kappa_i(t+1) = \kappa_i(t) + \mu_i + \varepsilon_i(t) \quad (3.12)$$

Prediksi tingkat mortalitas pada waktu $t+1$:

$${}_n \hat{q}_{x,t+1} = 1 - \exp\left(-n \times_n \widehat{m}_{x,t+1}\right) \quad (3.13)$$

dengan

$${}_n \widehat{m}_{x,t+1} = \exp\left(\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t+1) + (x-\bar{x})\hat{\kappa}_2(t+1) + [(x-\bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t+1) + \hat{\gamma}(c)\right) \quad (3.14)$$

IV. Hasil dan Pembahasan

4.1. Data Central Death Rate Indonesia

Data yang digunakan adalah *Central Death Rate* ${}_n m_{x,t}$ Indonesia yang diperoleh dari United Nations Population Division. Data mencakup rentang usia 0 hingga 90 tahun dengan interval usia 0, 1, 5, 10, ..., 90 tahun, dan rentang waktu 1950 hingga 2021 (72 tahun).

4.2. Estimasi Parameter Model CBDX

Estimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$, dan $\gamma(c)$ pada model CBDX3 dilakukan menggunakan metode *Sequential Maximum Likelihood* dengan algoritma BFGS. Penelitian menggunakan dua skenario:

Skenario 1: Estimasi parameter tanpa pengelompokan usia (seluruh usia 0-90 tahun)

1. $n_a = 20$ (banyak usia)
2. $n_y = 72$ (tahun observasi)
3. $n_c = 163$ (kohort)

Skenario 2: Estimasi parameter dengan pengelompokan usia berdasarkan WHO:

1. Kelompok 0 & 1 tahun: $n_a = 2$, $n_y = 72$, $n_c = 73$
2. Kelompok 5 ≤ x < 20: $n_a = 3$, $n_y = 72$, $n_c = 82$
3. Kelompok 20 ≤ x < 40: $n_a = 4$, $n_y = 72$, $n_c = 87$
4. Kelompok 40 ≤ x < 65: $n_a = 5$, $n_y = 72$, $n_c = 92$
5. Kelompok ≥ 65 tahun: $n_a = 6$, $n_y = 72$, $n_c = 97$

4.3. Evaluasi Kinerja Model

Kinerja model dievaluasi menggunakan MAPE untuk setiap usia:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{72}\sum_{t=1}^{72} \left| \frac{{}_n m_{x,t} - {}_n \hat{m}_{x,t}}{{}_n m_{x,t}} \right| \times 100\% \qquad (4.1)$$

Hasil Skenario 1 menunjukan mayoritas nilai MAPE > 10%, dengan nilai terendah 8.5% pada usia 75 tahun dan tertinggi 47.0% pada usia 30 tahun.

Hasil Skenario 2 menunjukan peningkatan signifikan dengan mayoritas MAPE < 10%. Untuk usia 40-90 tahun, MAPE mencapai ±1% dengan nilai terendah 0.2% pada usia 80 tahun.

4.4. Perbandingan Model CBDX

Perbandingan ketiga varian model untuk usia dewasa (40-90 tahun):

Tabel 1. Perbandingan Model CBDX

Usia	CBDX1	CBDX2	CBDX3
40	13.2%	19.9%	3.2%
60	7.2%	7.7%	0.8%
80	5.5%	6.3%	0.6%

Model CBDX3 secara konsisten menunjukkan performa terbaik dengan rata-rata MAPE 1.5% untuk usia dewasa 40-90 tahun. Keunggulan ini disebabkan oleh kemampuannya menangkap kompleksitas pola mortalitas melalui komponen kuadratik $[(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)$, yang tidak dimiliki CBDX1 dan CBDX2. Komponen ini memungkinkan representasi yang lebih akurat terhadap percepatan peningkatan mortalitas pada kelompok lanjut usia dan non-linearitas hubungan usia-mortalitas. Hasil ini membuktikan bahwa kompleksitas tambahan pada CBDX3 memberikan manfaat signifikan dalam pemodelan mortalitas Indonesia untuk kelompok dewasa dan lanjut usia.

4.5. Perhitungan Tingkat Mortalitas

Tingkat mortalitas $_nq_{x,t}$ dihitung menggunakan:

$$ {}_{n}q_{x,t} = 1 - \exp\left(-n \times_{n} \hat{m}_{x,t}\right) \tag{4.2} $$

MAPE untuk ${}_{n}q_{x,t}$ pada Skenario 2 menunjukkan hasil sangat baik (<10% untuk hampir semua usia, ±1% untuk usia 40-90 tahun).

4.6. Peramalan Tingkat Mortalitas

Parameter $\kappa_i(t)$ diramalkan menggunakan *Random Walk with Drift*:

$$ \kappa_i(t+n) = \kappa_i(t) + \mu_i \cdot n \tag{4.3} $$

dengan nilai drift:

$$ \mu_1 = 0.0047 $$

$$ \mu_2 = 2 \times 10^{-4} $$

$$ \mu_3 = 1 \times 10^{-4} $$

Hasil ramalan untuk 2022:

$$ \hat{\kappa}_1(2022) = 0.02280424 $$

$$ \hat{\kappa}_2(2022) = 0.005569592 $$

$$ \hat{\kappa}_3(2022) = -0.0002100718 $$

Nilai ${}_{n}\hat{m}_{x,2022}$ dan ${}_{n}\hat{q}_{x,2022}$ menunjukkan peningkatan risiko kematian seiring pertambahan usia, sesuai tren historis. hasil perhitungan menunjukkan bahwa risiko kematian penduduk Indonesia pada tahun 2022 tetap mengikuti pola tren historis, di mana risiko kematian meningkat seiring dengan pertambahan usia. Pola ini konsisten dengan karakteristik biologis dan epidemiologis populasi, di mana kelompok usia lanjut memiliki kerentanan yang lebih tinggi terhadap berbagai penyebab kematian. Proyeksi ini memberikan

informasi perencanaan program kesehatan dan penyusunan produk asuransi yang sesuai dengan profil risiko mortalitas penduduk Indonesia.

V. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini secara sukses mengaplikasikan Model CBDX untuk memodelkan tingkat mortalitas Indonesia. Berdasarkan analisis mendalam yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Model CBDX terbukti efektif dalam memodelkan mortalitas Indonesia, khususnya setelah dilakukan pengelompokan usia berdasarkan kategori demografis.

2. Kinerja model paling optimal untuk kelompok usia dewasa (40-90 tahun), dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi (MAPE ~1%). Hal ini sejalan dengan desain awal model.

3. Dari ketiga varian, CBDX3 merupakan model terbaik untuk data Indonesia, menunjukkan bahwa struktur model yang lebih kompleks dengan tiga efek periode diperlukan untuk menangkap pola mortalitas yang ada.

5.2 Saran

Temuan ini merekomendasikan agar pemerintah dan industri asuransi di Indonesia mempertimbangkan Model CBDX3, khususnya dengan pengelompokan usia, sebagai alat untuk proyeksi mortalitas dan penilaian risiko. Untuk penelitian mendatang, eksplorasi model *time series* yang lebih

canggih (seperti ARIMA atau model state-space) untuk memproyeksikan parameter κ(t) dapat meningkatkan akurasi peramalan jangka panjang.

VI. Daftar Referensi

Arneric, J., & Rozga, A. (2009). *Numerical optimization within vector of parameters estimation in volatility models* (Vol. 37).

Bowers, N., Gerber, H. U., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1997). *Actuarial mathematics* (2nd ed.). Schaumburg: Society of Actuaries.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal, 13*(1), 1–35. https://doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538

Cunningham, R. J., Herzog, T. N., & London, R. L. (2006). *Models for quantifying risk*. ACTEX Publications.

Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2009). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511800146

Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2019). *Actuarial mathematics for life contingent risks* (2nd ed.). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108784184

Dowd, K., Cairns, A. J. G., & Blake, D. (2020). CBDX: A workhorse mortality model from the Cairns-Blake-Dowd family. *Annals of Actuarial Science, 14*(2), 445–460. https://doi.org/10.1017/S1748499520000159

Harris, T. F., Yelowitz, A., & Courtemanche, C. (2021). Did COVID-19 change life insurance offerings? *Journal of Risk and Insurance, 88*(4). https://doi.org/10.1111/jori.12344

Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to mathematical statistics* (8th ed.).

Hunt, A., & Blake, D. (2014a). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal, 18*(1), 116–138. https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963

Hunt, A., & Blake, D. (2014b). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal, 18*(1), 116–138. https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963

Hunt, A., & Blake, D. P. (2020). On the structure and classification of mortality models. *SSRN Electronic Journal.* https://doi.org/10.2139/ssrn.3552208

Introduction to mathematical statistics. (2004). http://www.hep.edu.cn

Kanchan, T., Kumar, N., & Unnikrishnan, B. (2016). Mortality: Statistics. In J. Payne-James & R. W. Byard (Eds.), *Encyclopedia of forensic and legal medicine* (2nd ed., pp. 572–577). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800034-2.00297-4

Kwon, H. S., & Nguyen, V. H. (2019). Analysis of cause-of-death mortality and actuarial implications. *Communications for Statistical Applications and Methods, 26*(6), 557–573. https://doi.org/10.29220/CSAM.2019.26.6.557

Lewis, C. (1982). *Industrial and business forecasting methods.* Psicothema.

London, D. (1988). *Survival models and their estimation.* ACTEX Publications.

Mantra, I. B. (2009). *Demografi umum.* Pustaka Pelajar Offset.

Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology, 47*(1), 90–100. https://doi.org/10.1016/S0022-2496(02)00028-7

Nocedal, J., & Wright, S. (2006). *Numerical optimization.* Springer.

Rothman, H. K. (1992). Population matters: People, resources, environment, and immigration (Book review). *Environmental History Review, 16*(4). https://doi.org/10.2307/3984951

Syuhada, K., & Hakim, A. (2021). Stochastic modeling of mortality rates and Mortality-at-Risk forecast by taking conditional heteroscedasticity effect into account. *Heliyon, 7*(10), e08083. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e08083

Tsai, C. C. L., & Kim, S. (2022). Model mortality rates using property and casualty insurance reserving methods. *Insurance: Mathematics and Economics, 106*, 326–340. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.07.007

Véron, J., Preston, S., Heuveline, P., & Guillot, M. (2002). *Demography: Measuring and modeling population processes.* Population (French Edition), 57, 591. https://doi.org/10.2307/1535065

Wolthuis, H., & Willemse, W. J. (2004). Insurance industry, mortality tables in. In *Encyclopedia of social measurement* (Vol. 2). https://doi.org/10.1016/B0-12-369398-5/00253-X

World Health Organization. (2013). *Consolidated ARV guidelines 2013.* Geneva: World Health Organization. http://www.who.int/hiv/pub/guidelines/arv2013/