



UNIVERSITAS INDONESIA

APROKSIMASI *ULTIMATE RUIN PROBABILITY* BERDASARKAN  
MODEL CRAMÉR-LUNDBERG DENGAN TEOREMA TITIK TETAP  
BANACH

SKRIPSI

JERRY  
2106725160

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA  
DEPOK  
DESEMBER 2024



UNIVERSITAS INDONESIA

APROKSIMASI *ULTIMATE RUIN PROBABILITY* BERDASARKAN  
MODEL CRAMÉR-LUNDBERG DENGAN TEOREMA TITIK TETAP  
BANACH

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Aktuaria

JERRY

2106725160

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA  
DEPOK  
DESEMBER 2024

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Jerry

NPM : 2106725160

Tanda Tangan :

A handwritten signature in black ink, appearing to be the name 'Jerry' written in a stylized, cursive script.

Tanggal : 19 Desember 2024

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Jerry


NPM : 2106725160


Program Studi : Sarjana Ilmu Aktuaria


Judul Skripsi : Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* Berdasarkan Model Cramér-Lundberg dengan Teorema Titik Tetap Banach


Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

## DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Fevi Novkaniza, S.Si., M.Si. (  )

Pembimbing II : Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc., Ph.D. (  )

Penguji I : Sarini Abdullah, S.Si., M.Stats., Ph.D. (  )

Penguji II : Dr. Hengki Tasman (  )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 19 Desember 2024

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini dengan judul "Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* berdasarkan Model Cramér-Lundberg dengan Teorema Titik Tetap Banach". Selama masa perkuliahan dan penulisan skripsi ini, penulis telah mendapat banyak dukungan, bantuan, dan inspirasi dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin berterima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing I dari penulis yang telah bersedia untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih atas saran, bimbingan, dan doa yang diberikan selama penulis menjalani perkuliahan dan penulisan skripsi ini.
2. Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing II dari penulis yang telah bersedia untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih atas saran, bimbingan, dan doa yang diberikan selama masa penulisan skripsi ini.
3. Sarini Abdullah, S.Si., M.Stats., Ph.D. dan Dr. Hengki Tasman selaku dosen penguji, terima kasih telah meluangkan waktunya untuk menghadiri sidang skripsi penulis serta memberikan masukan dan saran agar tugas akhir ini dapat menjadi lebih baik.
4. Seluruh dosen, asisten dosen, dan asisten laboratorium Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjalani masa perkuliahan.
5. Seluruh staf Departemen Matematika dan staf FMIPA UI yang melakukan tugas mereka dengan baik.
6. Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia (AAJI) yang telah memberi bantuan dan dukungan pada penulisan skripsi ini.
7. Keluarga penulis yang telah mendukung penulis dalam berbagai aspek selama masa perkuliahan.
8. Enrico Yauri, selaku teman penulis yang memiliki kontribusi yang signifikan terhadap kehidupan penulis selama masa perkuliahan.
9. Amelia Deborah, Callista Heryanto, Devi Wyatna, Georgia Aretha, Githa Sajhna, Maurine Athalia, dan Tricia Alisha, selaku teman baik penulis yang telah menemani hari-hari perkuliahan penulis sehingga kuliah terasa lebih berwarna dan menyenangkan.

10. Andrew Prasetyo, Christian Jonathan, Joe Gehansen, Michael Scaf, Nicholas Calvin, Peter Alexander Wandojo, Samuel Christopher, Sebastian Tobias, dan Viriya Gunawan, selaku teman bermain penulis selama masa perkuliahan.
11. Teman-teman lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu, termasuk kakak dan adik tingkat, di Departemen Matematika FMIPA UI yang telah membantu, mendukung dan menginspirasi penulis dalam perkuliahan.

Jerry

2024

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS  
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Jerry  
NPM : 2106725160  
Program Studi : Sarjana Ilmu Aktuaria  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* Berdasarkan Model Cramér-Lundberg dengan  
Teorema Titik Tetap Banach

beserta perangkat yang ada. Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 19 Desember 2024

Yang menyatakan



(Jerry)

## ABSTRAK

Nama : Jerry  
Program Studi : Ilmu Aktuaria  
Judul : Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* Berdasarkan Model Cramér-Lundberg dengan Teorema Titik Tetap Banach

*Ultimate ruin probability* adalah probabilitas kebangkrutan suatu perusahaan asuransi tanpa batasan waktu. Dengan mengetahui *ultimate ruin probability*, perusahaan asuransi dapat mengetahui gambaran mengenai risiko yang dihadapi dalam jangka panjang. Penelitian ini membahas masalah aproksimasi *ultimate ruin probability*, di mana *capital* keseluruhan perusahaan direpresentasikan ke dalam model Cramér-Lundberg. Model Cramér-Lundberg mengasumsikan bahwa waktu kedatangan antarklaim mengikuti distribusi eksponensial, sehingga distribusi banyak klaimnya berdistribusi Poisson. Severitas klaim memiliki distribusi yang independen dan identik dengan *support positif*. Premi datang secara kontinu dengan laju konstan. Beberapa persamaan yang merepresentasikan *ultimate ruin probability*, antara lain persamaan integral Volterra dan formula Pollaczek–Khinchine. Namun, persamaan-persamaan tersebut sangat sulit untuk diselesaikan secara analitik. Hasil eksplisit dengan persamaan-persamaan tersebut hanya ada untuk beberapa distribusi severitas. Oleh karena itu, diperlukan metode aproksimasi untuk menghitung *ultimate ruin probability*. Metode yang dibahas dalam penelitian ini adalah metode yang memanfaatkan teorema titik tetap Banach, serta simulasi Monte Carlo. Teorema titik tetap Banach memanfaatkan persamaan integral Volterra sebagai pemetaan kontraktif. Dengan pemetaan tersebut, dapat dibentuk barisan yang konvergen ke fungsi *ultimate ruin probability* yang dinyatakan dalam formula Pollaczek-Khinchine. Untuk mengurangi variansi dari estimasi, digunakan varian dari simulasi Monte Carlo, yaitu quasi-Monte Carlo. Dengan menggabungkan teorema titik tetap Banach dan quasi-Monte Carlo, diharapkan akurasi aproksimasi *ruin probability* pada model Cramér-Lundberg cukup akurat, serta dapat digunakan dalam mengaproksimasi *ultimate ruin probability* untuk distribusi severitas klaim selain distribusi eksponensial.

Kata kunci:

Barisan Sobol, *integrated tail distribution*, quasi-Monte Carlo, teori *ruin*

## ABSTRACT

Name : Jerry  
Program : Undergraduate Study Programme of Actuarial Science  
Title : Approximation of Ultimate Ruin Probability Based on Cramér-Lundberg Model with Banach's Fixed-Point Theorem

Ultimate ruin probability is the probability of bankruptcy for an insurance company without a time limit. By understanding the ultimate ruin probability, an insurance company can get an idea of the long-term risks it faces. This study discusses the problem of approximating the ultimate ruin probability, where the company's total capital is represented by the Cramér-Lundberg model. The Cramér-Lundberg model assumes that the interclaim arrival times follow an exponential distribution, making the number of claims follow a Poisson distribution. Claim severity has an independent and identically distributed positive support distribution. Premiums arrive continuously at a constant rate. Several equations represent the ultimate ruin probability, including the Volterra integral equation and the Pollaczek-Khinchine formula. However, these equations are difficult to solve analytically. Explicit solutions with these equations exist only for a few claims severity distributions. Therefore, approximation methods are needed to calculate the ultimate ruin probability. The method discussed in this study utilizes Banach's fixed-point theorem and Monte Carlo simulation. Banach's fixed-point theorem utilizes the Volterra integral equation as a contractive mapping. With this mapping, a sequence converging to the ultimate ruin probability that is represented in the form of Pollaczek-Khinchine formula can be formed. To reduce the variance of the estimation, the quasi-Monte Carlo variant will be used. By combining Banach's fixed-point theorem and quasi-Monte Carlo, it is expected that the approximation accuracy of ultimate ruin probability in the Cramér-Lundberg model will be quite accurate, and can be used to approximate the ultimate ruin probability for claim severity distributions other than the exponential distribution.

Keywords:

Integrated tail distribution, quasi-Monte Carlo, ruin theory, Sobol sequence

## DAFTAR SIMBOL

Notasi	Deskripsi
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks
$d$	Metrik pada suatu ruang metrik $(X, d)$
$D_N(X)$	<i>Discrepancy</i> dari himpunan $X_N$ pada $\mathfrak{R}^s$
$F$	<i>Field</i>
$\mathbb{F}_{p^n}$ atau $\text{GF}(p^n)$	Galois/ <i>Finite field</i> dengan orde $p^n$
$F[x]$	Himpunan polinomial dengan koefisien pada $F$
$\mathfrak{C}$	Himpunan fungsi kontinu $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$
$L_t$	Fungsi tangga yang dibentuk dari $\sup_{0 \leq x \leq t} \{S_x\}$
${}_kL$	<i>Ladder</i> ke- $k$
$L$	Limit dari $L_t$ ketika $t \rightarrow \infty$
$m_{k,j}$	Inisialisasi awal pada Sobol
$\mathbb{P}$	Himpunan bilangan prima
$\mathfrak{R}^s$	<i>Hypercube</i> satuan berdimensi $s$
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan riil positif
$R_t$	Proses risiko Poisson/model Cramer-Lundberg
$S_t$	Proses surplus klaim
$v_{k,j}$	<i>Direction number</i> pada barisan Sobol
$\mathbb{Z}_p^+$	Grup penjumlahan dari $\text{GF}(p^n)$
$\mathbb{Z}_p^\times$	Grup perkalian dari $\text{GF}(p^n)$
$\psi(u)$	<i>Ultimate ruin probability</i>
$\psi(u, T)$	<i>Finite-time ruin probability</i>
$\tau(u)$	Waktu <i>ruin</i>
$\phi(n)$	Euler's <i>totient function</i>
$\ \cdot\ _\infty$	Metrik uniform
$\oplus$	Operasi XOR

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR SIMBOL	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	5
1.3 Ruang Lingkup Penelitian . . . . .	6
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	6
1.5 Metodologi Penelitian . . . . .	6
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>8</b>
2.1 Fungsi Gama . . . . .	8
2.2 Karakteristik Distribusi . . . . .	9
2.3 Distribusi Probabilitas Khusus . . . . .	11
2.3.1 Distribusi Probabilitas Diskrit . . . . .	11
2.3.1.1 Distribusi Poisson . . . . .	12
2.3.1.2 Distribusi Binomial Negatif . . . . .	12
2.3.2 Distribusi Probabilitas Kontinu . . . . .	13
2.3.2.1 Distribusi Uniform Kontinu . . . . .	13
2.3.2.2 Distribusi Gama . . . . .	13
2.3.2.3 Distribusi Eksponensial . . . . .	18

2.3.2.4	Distribusi Weibull . . . . .	20
2.3.2.5	Distribusi Lomax . . . . .	25
2.4	<i>Maximum Likelihood Estimation</i> . . . . .	32
2.5	<i>Integrated Tail Distribution</i> . . . . .	33
2.6	<i>Compound Distribution</i> . . . . .	33
2.7	Proses <i>Compound Poisson</i> . . . . .	34
2.8	<i>Inverse Transformation Method</i> . . . . .	36
2.9	Metode Regula Falsi . . . . .	36
2.10	Ruang Metrik . . . . .	36
2.11	Barisan Fungsi . . . . .	38
2.12	<i>Ruin Theory</i> . . . . .	39
2.12.1	Model Cramér-Lundberg . . . . .	39
2.12.2	Waktu <i>Ruin</i> . . . . .	40
2.12.3	<i>Ruin Probability</i> . . . . .	40
2.12.4	Formula Pollaczek-Khinchine . . . . .	41
2.12.5	Metode Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> via Formula Pollaczek-Khinchine . . . . .	47
2.13	Persamaan Integral Volterra . . . . .	48
2.14	Teorema Titik Tetap Banach . . . . .	50
2.15	Metode Quasi-Monte Carlo . . . . .	53
2.15.1	Barisan <i>Low Discrepancy/Quasirandom</i> . . . . .	54
2.15.2	Barisan Sobol . . . . .	56
2.15.2.1	Galois <i>Field/Finite Field</i> . . . . .	56
2.15.2.2	<i>Field Theory</i> . . . . .	57
2.15.2.3	Operasi XOR . . . . .	62
2.15.2.4	Gray <i>code</i> . . . . .	62
2.15.2.5	Barisan van der Corput . . . . .	62
2.15.2.6	Langkah Konstruksi Barisan Sobol . . . . .	63
2.15.3	Prosedur Quasi-Monte Carlo . . . . .	68

**3 FORMULASI *ULTIMATE RUIN PROBABILITY* DENGAN TEOREMA TITIK TETAP BANACH 69**

3.1	Formulasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> dengan Teorema Titik Tetap Banach . . . . .	69
3.2	Metode Quasi-Monte Carlo untuk Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> . . . . .	88
3.3	<i>Integrated Tail Distribution</i> Untuk Beberapa Jenis Distribusi . . . . .	89
3.3.1	Distribusi Eksponensial . . . . .	92
3.3.2	Distribusi Weibull . . . . .	93
3.3.3	Distribusi Lomax . . . . .	95

<b>4</b>	<b>ANALISIS APROKSIMASI NUMERIK <i>ULTIMATE RUIN PROBABILITY</i></b>	<b>97</b>
4.1	Simulasi Aproksimasi Numerik <i>Ultimate Ruin Probability</i> dengan Formulasi Teorema Titik Tetap Banach dan Metode Quasi-Monte Carlo . . . . .	99
4.1.1	Distribusi Eksponensial . . . . .	100
4.1.2	Distribusi Weibull . . . . .	106
4.1.3	Distribusi Lomax . . . . .	111
4.2	Perbandingan <i>Ultimate Ruin Probability</i> . . . . .	115
4.2.1	Severitas dengan Pdf atau Cdf yang Serupa . . . . .	115
4.2.2	Berdasarkan <i>Tail</i> dari Distribusi Severitas . . . . .	117
4.3	Simulasi Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> dengan Data Aktual dan Perbandingan Hasil Aproksimasi . . . . .	120
4.3.1	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> Diketahui Data Aktual . . .	120
4.3.2	Perbandingan Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> . . . . .	126
<b>5</b>	<b>PENUTUP</b>	<b>132</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	132
5.2	Saran . . . . .	133
	<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>135</b>
	<b>LAMPIRAN</b>	<b>140</b>
	<b>Lampiran 1: Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial Menggunakan Metode MLE</b>	<b>141</b>
	<b>Lampiran 2: Estimasi Parameter Distribusi Weibull Menggunakan Metode MLE</b>	<b>141</b>
	<b>Lampiran 3: Estimasi Parameter Distribusi Lomax Menggunakan Metode MLE</b>	<b>143</b>
	<b>Lampiran 4: Sintaks Python</b>	<b>145</b>
	<b>Lampiran 5: Sintaks Wolfram Mathematica</b>	<b>158</b>

## DAFTAR TABEL

2.1	Karakteristik Distribusi Gama . . . . .	17
2.2	Karakteristik Distribusi Eksponensial . . . . .	19
2.3	Karakteristik Distribusi Weibull . . . . .	23
2.4	Karakteristik Distribusi Lomax . . . . .	30
2.5	Tabel Operasi XOR pada Operasi Bilangan Biner . . . . .	62
4.1	Karakteristik dari Distribusi Severitas Klaim Eksponensial untuk Tiap Pa- rameter . . . . .	100
4.2	<i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim $\text{Exp}(\frac{1}{750})$ . . .	101
4.3	<i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . . .	103
4.4	<i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim $\text{Exp}(\frac{1}{1.500})$ . . .	105
4.5	Karakteristik dari Distribusi Severitas Weibull untuk Tiap Pasang Parameter	107
4.6	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ ) . . . . .	107
4.7	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $500, \frac{1}{2}$ ) . . . . .	108
4.8	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}$ ) . . . . .	109
4.9	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2$ ) . . . . .	110
4.10	Karakteristik dari Distribusi Severitas Lomax untuk Tiap Pasang Parameter	111
4.11	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $250, \frac{5}{4}$ ) . . . . .	111
4.12	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $1.500, \frac{5}{2}$ ) . . . . .	112
4.13	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $2.500, \frac{7}{2}$ ) . . . . .	113
4.14	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $3.500, \frac{9}{2}$ ) . . . . .	114
4.15	Karakteristik dari Distribusi dengan Cdf yang Serupa . . . . .	116
4.16	Karakteristik dari Distribusi <i>Light-tailed</i> . . . . .	118
4.17	Karakteristik dari Distribusi <i>Heavy-tailed</i> . . . . .	119
4.18	Statistika Deskriptif dari <b>LOSS2</b> . . . . .	121
4.19	Estimasi Parameter . . . . .	121
4.20	Karakteristik Tiap Distribusi . . . . .	122
4.21	Hasil Perbandingan Distribusi . . . . .	122

4.22	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Exp( $\frac{1}{5.953,461}$ ) . . . . .	123
4.23	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Weibull(3.597,022, 0,649) . . . . .	123
4.24	Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Distribusi Severitas Lo- max(4.359,399, 1,911) . . . . .	123
4.25	Perbandingan Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Severitas Exp( $\frac{1}{5.953,461}$ ) . . . . .	127
4.26	Perbandingan Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Severitas Weibull(3.597,022, 0,649) . . . . .	128
4.27	Perbandingan Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Severitas Lo- max(4.359,399, 1,911) . . . . .	129
4.28	<i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk $k$ Tertentu . . . . .	130

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik Fungsi Gama . . . . .	8
2.2	Grafik Pdf Distribusi Gama . . . . .	17
2.3	Grafik Cdf Distribusi Gama . . . . .	17
2.4	Grafik Pdf Distribusi Eksponensial . . . . .	19
2.5	Grafik Cdf Distribusi Eksponensial . . . . .	20
2.6	Grafik Pdf Distribusi Weibull . . . . .	24
2.7	Grafik Cdf Distribusi Weibull . . . . .	24
2.8	Grafik Pdf Distribusi Lomax . . . . .	31
2.9	Grafik Cdf Distribusi Lomax . . . . .	31
2.10	Ilustrasi fungsi $S_t$ . . . . .	45
2.11	Ilustrasi fungsi $L_t$ . . . . .	46
2.12	Barisan Sobol dengan 1.024 titik pertama . . . . .	55
2.13	Titik seragam sebanyak 1.024 . . . . .	55
2.14	Barisan Sobol dengan 8.192 titik pertama . . . . .	56
2.15	Titik seragam sebanyak 8.192 . . . . .	56
4.1	<i>Flowchart</i> Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> . . . . .	97
4.2	<i>Flowchart</i> Formulasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> Berdasarkan Teorema Titik Tetap Banach . . . . .	98
4.3	<i>Flowchart</i> Metode Quasi-Monte Carlo untuk Mengaproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> . . . . .	99
4.4	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Aktual untuk $\text{Exp}(\frac{1}{750})$ . . . . .	101
4.5	Plot Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk $\text{Exp}(\frac{1}{750})$ . . . . .	102
4.6	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Gabungan untuk $\text{Exp}(\frac{1}{750})$ . . . . .	102
4.7	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Aktual untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . . . . .	103
4.8	Plot Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . . . . .	104
4.9	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Gabungan untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . . . . .	104
4.10	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Aktual untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1500})$ . . . . .	105
4.11	Plot Aproksimasi <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1500})$ . . . . .	106
4.12	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> Gabungan untuk $\text{Exp}(\frac{1}{1500})$ . . . . .	106
4.13	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ ) . . . . .	107
4.14	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Weibull( $500, \frac{1}{2}$ ) . . . . .	108
4.15	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Weibull( $\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}$ ) . . . . .	109
4.16	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Weibull( $\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2$ ) . . . . .	110
4.17	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Lomax( $250, \frac{5}{4}$ ) . . . . .	112
4.18	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Lomax( $1.500, \frac{5}{2}$ ) . . . . .	113

4.19	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Lomax( $2.500, \frac{7}{2}$ ) . . . . .	114
4.20	Plot <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Lomax( $3.500, \frac{9}{2}$ ) . . . . .	115
4.21	Plot Perbandingan Cdf yang Serupa . . . . .	116
4.22	Plot Perbandingan <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Cdf Severitas yang Serupa . . . . .	116
4.23	Perbandingan Cdf <i>Light-tailed</i> . . . . .	117
4.24	Perbandingan <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Severitas <i>Light-tailed</i> . . . .	118
4.25	Perbandingan Cdf <i>Heavy-tailed</i> . . . . .	119
4.26	Perbandingan <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Severitas <i>Heavy-tailed</i> . . . .	119
4.27	Perbandingan Grafik <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan $\theta = 0,1$ . . . . .	124
4.28	Perbandingan Grafik <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan $\theta = 0,3$ . . . . .	124
4.29	Perbandingan Grafik <i>Ultimate Ruin Probability</i> untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan $\theta = 0,5$ . . . . .	125

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Menurut Peraturan Otoritas Jasa Keuangan (OJK) Nomor 20 Tahun 2023, asuransi adalah perjanjian antara dua pihak, yaitu perusahaan asuransi dan pemegang polis, yang menjadi dasar bagi penerimaan premi perusahaan asuransi sebagai imbalan untuk memberikan penggantian kepada tertanggung atau pemegang polis karena kerugian, kerusakan, biaya yang timbul, kehilangan keuntungan, atau tanggung jawab hukum kepada pihak ketiga yang mungkin diderita tertanggung atau pemegang polis karena terjadinya suatu peristiwa yang tidak pasti atau memberikan pembayaran yang didasarkan pada meninggalnya tertanggung atau pembayaran yang didasarkan pada hidupnya tertanggung dengan manfaat yang besarnya telah ditetapkan dan/atau didasarkan pada hasil pengelolaan dana. Asuransi memiliki peran penting dalam mengalihkan risiko dari pemegang polis kepada perusahaan asuransi, sehingga pemegang polis mendapatkan perlindungan finansial dari perusahaan asuransi dalam situasi-situasi yang tidak terduga.

Menurut Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2014 Tentang Perasuransian, premi adalah sejumlah uang yang ditetapkan oleh perusahaan asuransi atau perusahaan reasuransi dan disetujui oleh pemegang polis untuk dibayarkan berdasarkan perjanjian asuransi atau perjanjian reasuransi, atau sejumlah uang yang ditetapkan berdasarkan ketentuan peraturan perundang-undangan yang mendasari program asuransi wajib untuk memperoleh manfaat. Dengan membayar premi, pemegang polis mendapatkan jaminan manfaat bila terjadi suatu hal yang berada dalam cakupan perjanjian asuransi. Untuk mendapatkan manfaat, pemegang polis perlu melakukan klaim terhadap perusahaan asuransi. Besar klaim yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi disebut severitas klaim.

Salah satu tantangan yang dihadapi perusahaan asuransi adalah mengukur ketidakpastian akibat klaim yang terjadi. Informasi mengenai distribusi severitas klaim tidak cukup untuk mengukur risiko yang dihadapi perusahaan asuransi karena total klaim juga dipengaruhi oleh waktu kedatangan antarklaim. Oleh karena itu, waktu kedatangan antarklaim dan severitas klaim menjadi perhatian karena ekspektasi total klaim dipengaruhi oleh kedua hal tersebut. Para aktuaris memiliki tugas untuk mengevaluasi risiko klaim tersebut dan menetapkan premi yang sesuai untuk nasabah. Hal ini merupakan hal yang krusial karena penetapan premi yang terlalu rendah dapat menyebabkan kerugian pada perusahaan. Bahkan pada kasus ekstrem, penentuan premi yang salah dapat menyebabkan kebangkrutan suatu perusahaan. Severitas klaim dan frekuensi klaim tidak dapat diketahui secara pasti. Oleh karena itu, digunakan variabel acak untuk merepresentasikan kedua hal tersebut.

Karakteristik umum dari distribusi severitas klaim adalah distribusi dari klaimnya

bersifat *positively skewed* dan memiliki *support* positif (Adcock et al., 2015). Sebuah distribusi *positively skewed* ketika ekor pada sisi kanan distribusi lebih panjang atau lebih tebal dibanding sisi kiri. Sebuah distribusi memiliki *support* positif ketika nilai yang mungkin dari distribusi tersebut positif. Distribusi seperti gamma, lognormal, dan Weibull cocok untuk karakteristik klaim yang memiliki probabilitas sangat kecil dalam terjadinya kerugian besar, sedangkan distribusi Pareto, log-logistic, Fréchet, dan Lomax cocok untuk karakteristik klaim yang memiliki probabilitas cukup tinggi dalam terjadinya kerugian besar (Ahmad et al., 2022). Untuk menentukan parameter terbaik dari asumsi distribusi yang digunakan, dapat digunakan beberapa metode, seperti metode maksimum *likelihood*/*maximum likelihood estimation* (MLE), metode momen, metode persentil, estimasi jarak minimum, dan inferensi Bayesian.

Waktu kedatangan antarklaim pasti bernilai positif. Jadi, distribusi yang cocok untuk memodelkan waktu kedatangan adalah distribusi kontinu dengan *support* positif. Variabel acak yang merepresentasikan waktu kedatangan antarklaim dihubungkan dengan suatu distribusi diskrit yang menyatakan frekuensi klaim. Distribusi frekuensi klaim hanya memiliki bentuk sederhana ketika waktu kedatangan antarklaim berdistribusi eksponensial, di mana distribusi frekuensi klaimnya yang bersesuaian berdistribusi Poisson. Ketika distribusi waktu kedatangan antarklaim memiliki distribusi selain eksponensial, maka bentuk fungsi distribusi dari variabel acak yang merepresentasikan frekuensi klaim memiliki bentuk yang kompleks (Fadahuni, 2016). Dengan frekuensi klaim dan severitas klaim, dapat didefinisikan total klaim, yaitu penjumlahan dari klaim-klaim yang terjadi, dengan banyak klaimnya adalah bersesuaian dengan frekuensi klaim. Distribusi yang merepresentasikan total klaim sebagai sumasi dari variabel acak severitas dengan frekuensi klaim yang berdistribusi diskrit disebut distribusi *compound* (Tse, 2009). Distribusi dari frekuensi klaim disebut sebagai distribusi primer, sedangkan distribusi dari severitas klaim disebut sebagai distribusi sekunder. Ketika distribusi frekuensi klaim berupa distribusi Poisson, maka distribusi *compound* tersebut disebut sebagai distribusi *compound* Poisson.

Seiring berjalannya waktu, sebuah perusahaan asuransi mendapatkan premi dari nasabah dan melakukan pembayaran klaim. Untuk merepresentasikan *capital* atau uang yang dimiliki perusahaan asuransi secara keseluruhan pada suatu waktu, diperlukan suatu variabel yang menyatakan *capital* awal, variabel yang menyatakan kedatangan premi per satuan waktu, dan variabel acak yang menyatakan total klaim. Agar risiko kerugian dan kebangkrutan kecil, ekspektasi dari premi yang masuk harus melebihi ekspektasi klaim yang terjadi. Oleh karena itu, umumnya, premi ditentukan berdasarkan ekspektasi dari total klaim dan faktor *loading*. Faktor *loading* adalah pengali tambahan untuk premi yang berupa suatu bilangan riil positif. Model keseluruhan *capital* suatu perusahaan asuransi dinyatakan sebagai penjumlahan dari *capital* awal ditambah total kedatangan premi, dikurangi total klaim yang terjadi. Secara umum, model yang menyatakan keseluruhan *capital*

yang dimiliki suatu perusahaan asuransi dikenal dengan sebutan model Sparre-Andersen (Thompson, 2013). Model yang berupa kasus khusus dari model Sparre-Andersen di mana frekuensi klaim mengikuti distribusi Poisson disebut sebagai proses risiko Poisson atau model Cramér-Lundberg (Rolski, 2010).

Dengan konstruksi model yang menyatakan keseluruhan *capital* perusahaan, yaitu model Cramér-Lundberg, maka risiko yang dihadapi perusahaan dapat ditinjau. Suatu perusahaan dikatakan bangkrut ketika *capital* keseluruhan perusahaan bernilai negatif. Suatu ukuran yang umum digunakan untuk mengukur risiko kebangkrutan adalah probabilitas kebangkrutan atau *ruin probability*. Terdapat dua jenis *ruin probability* yang dapat diamati, yaitu *ultimate ruin probability* dan *ruin probability* waktu hingga (*finite-time ruin probability*). Perbedaan antara kedua hal tersebut adalah batasan waktu yang dievaluasi. *Ruin probability* waktu hingga adalah probabilitas kebangkrutan suatu perusahaan terjadi dalam jangka waktu tertentu, sedangkan *ultimate ruin probability* adalah probabilitas kebangkrutan suatu perusahaan asuransi tanpa batasan waktu. Dengan kata lain, *ultimate ruin probability* merupakan probabilitas bahwa *capital* suatu perusahaan asuransi pernah mencapai negatif (Burnecki et al., 2005).

*Ultimate ruin probability* merupakan ukuran risiko yang lebih komprehensif dalam jangka panjang dibandingkan *ruin probability* waktu hingga. Dengan mengetahui *ultimate ruin probability*, perusahaan asuransi dapat mengetahui gambaran kasar mengenai risiko yang dihadapi dalam jangka panjang. Jika *ultimate ruin probability* dianggap masih cukup tinggi, maka perusahaan asuransi dapat meninjau ulang premi yang telah ditentukan dan *capital* yang harus disiapkan.

*Ultimate ruin probability* dapat dipandang sebagai probabilitas *capital* perusahaan bernilai negatif pada suatu waktu. *ultimate ruin probability* juga dapat dipandang dari perspektif lain, yaitu berdasarkan proses surplus klaim. Proses surplus klaim adalah proses yang menyatakan kerugian suatu perusahaan, yaitu dengan menghitung total klaim yang terjadi dikurangi total premi yang didapat perusahaan. Perusahaan dikatakan bangkrut ketika surplus klaim melebihi *capital* awal yang dimiliki. Proses surplus klaim ini yang umumnya digunakan dalam mengevaluasi *ultimate ruin probability*.

Salah satu persamaan yang merepresentasikan *ultimate ruin probability* untuk model Cramér-Lundberg adalah persamaan integral Volterra (Martire, 2022). Persamaan integral Volterra memiliki aplikasi di berbagai bidang, seperti mekanika fluida, demografi, viskoelastisitas, dan teori *ruin*. Pemanfaatan persamaan integral Volterra pada perhitungan *ultimate ruin probability* diajukan oleh Gerber pada tahun 1979 (Ramsey & Usabel, 1997). Persamaan integral Volterra terdiri atas penjumlahan fungsi tertentu dengan integral dari fungsi yang ingin dicari dikalikan dengan fungsi kernel. Dalam konteks *ruin theory*, persamaan integral Volterra menyatakan *ultimate ruin probability* sebagai integral dari fungsi yang melibatkan *ultimate ruin probability* itu sendiri. Akibatnya, persamaan

integral Volterra hanya dapat diselesaikan untuk kasus di mana transformasi Laplace dari pdf distribusi severitas berupa fungsi rasional (Burnecki et al., 2003).

Selain persamaan integral Volterra, persamaan lain yang dapat digunakan untuk merepresentasikan *ultimate ruin probability* adalah formula Pollaczek-Khinchine. Pada teori antrian, formula Pollaczek-Khinchine digunakan untuk menyatakan hubungan panjang antrian dengan distribusi waktu pelayanan, di mana kedatangan antrian mengikuti proses Poisson (Asmussen, 2003). Dalam menyatakan *ultimate ruin probability*, formula Pollaczek-Khinchine melibatkan konvolusi ke- $n$  dari fungsi distribusi dari suatu variabel acak. Variabel acak yang digunakan bukanlah variabel acak dari distribusi severitas klaim, melainkan *integrated tail distribution* dari distribusi severitas klaim. *Integrated tail distribution* dari suatu distribusi didefinisikan sebagai fungsi survival dari distribusi tersebut dibagi dengan ekspektasinya (Klüppelberg, 1988). Dengan menggunakan formula Pollaczek-Khinchine, hasil eksplisit dari *ultimate ruin probability* hanya dapat diperoleh secara langsung untuk distribusi severitas eksponensial. Oleh karena itu, diperlukan metode aproksimasi untuk menghitung *ultimate ruin probability* untuk distribusi severitas klaim selain eksponensial.

Menurut Ross (2019), metode yang umum digunakan untuk aproksimasi *ultimate ruin probability* adalah melalui simulasi Monte Carlo terhadap frekuensi klaim dan severitas klaim secara langsung. Simulasi Monte Carlo adalah suatu algoritma yang berbasis *sampling* acak berulang untuk menghasilkan aproksimasi numerik dengan menggunakan rata-rata dari hasil simulasi. Metode aproksimasi ini dikenal dengan nama metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine (Burnecki et al., 2005). Kelemahan dari metode ini adalah waktu komputasi yang cukup lama karena simulasi Monte Carlo membutuhkan sampel yang cukup banyak untuk mendapatkan hasil yang akurat (Krykova, 2004). Setiap metode aproksimasi memiliki kompleksitas dan akurasi yang bervariasi. Tidak hanya itu, terdapat syarat-syarat untuk distribusi severitas klaim agar suatu metode aproksimasi dapat digunakan. Oleh karena itu, metode aproksimasi yang digunakan bergantung pada distribusi severitas klaim, kecepatan perhitungan, dan akurasi dari aproksimasi yang diinginkan.

Martínez Sánchez dan Baltazar-Larios (2022) mengajukan metode untuk mengaproksimasi *ultimate ruin probability* dengan memanfaatkan teorema titik tetap Banach. Titik tetap atau *fixed-point* dari suatu pemetaan adalah suatu titik di mana hasil pemetaan dari titik tersebut adalah titik tersebut juga (Khojasteh et al., 2021). Teorema titik tetap Banach adalah teorema yang menjamin bahwa suatu fungsi memiliki *fixed-point* jika pemetaan fungsi tersebut kontraktif (Khojasteh et al., 2021). Sebuah pemetaan disebut kontraktif jika untuk sembarang dua titik, jarak antara dua titik hasil pemetaan dari kedua titik tersebut kurang dari jarak dua titik awal yang bersesuaian. Untuk memanfaatkan teorema titik tetap Banach, digunakan pemetaan dengan ekspresi yang menyerupai persamaan integral Volterra sebagai pemetaan kontraktif. Dengan pemetaan tersebut,

dapat dibentuk barisan yang konvergen ke *ultimate ruin probability* (Martínez Sánchez & Baltazar-Larios, 2022). Iterasi yang dibutuhkan agar eror yang dihasilkan kecil bergantung pada nilai awal barisan dan nilai *capital* awal yang dimiliki. Limit menuju tak hingga untuk rumus eksplisit dari barisan tersebut memiliki bentuk yang serupa dengan formula Pollaczek-Khinchine.

Namun, rumus eksplisit yang dihasilkan masih mengandung konvolusi dari fungsi distribusi dari *integrated tail distribution*. Bentuk tertutup dari *ultimate ruin probability* hanya ada ketika severitas klaim berdistribusi eksponensial (Martínez Sánchez & Baltazar-Larios, 2022). Oleh karena itu, digunakan simulasi Monte Carlo untuk mengaproksimasi nilai dari tiap konvolusi dari fungsi distribusi tersebut ketika distribusi severitas klaim mengikuti distribusi selain eksponensial. Simulasi Monte Carlo untuk mengaproksimasi fungsi distribusi melibatkan pembangunan suatu sampel acak dari distribusi Uniform standar, yang selanjutnya ditransformasi menggunakan inversi dari fungsi distribusinya.

Untuk mengurangi variansi dari hasil simulasi, digunakan varian dari simulasi Monte Carlo, yaitu quasi-Monte Carlo. Simulasi dengan quasi-Monte Carlo memiliki tingkat konvergensi yang lebih cepat dibanding Monte Carlo standar (Botev & Ridder, 2017). Perbedaan Monte Carlo standar dengan quasi-Monte Carlo adalah sampel angka yang digunakan. Monte Carlo standar menggunakan angka acak yang bernilai di antara 0 dan 1, yang disebut sebagai bilangan *pseudorandom*, sedangkan quasi-Monte Carlo menggunakan barisan khusus, yaitu barisan dengan *discrepancy* rendah (Botev & Ridder, 2017). Barisan dengan *discrepancy* rendah adalah barisan di mana nilai-nilai dari barisannya terdistribusi secara cukup merata pada *n-hypercube* dengan ukuran satuan. Oleh karena itu, titik-titik yang dihasilkan dengan quasi-Monte Carlo dapat menangkap nilai-nilai ekstrem lebih baik dibandingkan simulasi Monte Carlo. Barisan dengan *discrepancy* rendah disebut juga barisan *quasirandom*. Barisan *quasirandom* dihasilkan menggunakan algoritma secara deterministik, yang berarti sampel yang dihasilkan selalu sama (Krykova, 2004).

Dengan menggabungkan teorema titik tetap Banach dan quasi-Monte Carlo, diharapkan akurasi aproksimasi *ruin probability* pada model Cramér-Lundberg cukup akurat dengan waktu komputasi yang rendah, serta dapat digunakan dalam mengaproksimasi *ultimate ruin probability* untuk distribusi severitas klaim selain distribusi eksponensial.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah yang dibahas pada tugas akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana formulasi *ultimate ruin probability* dengan menggunakan teorema titik tetap Banach?
2. Bagaimana cara mengaproksimasi *ultimate ruin probability* berdasarkan formulasi

teorema titik tetap Banach dengan metode quasi-Monte Carlo?

3. Bagaimana pengaruh faktor *loading*, jenis distribusi severitas klaim, dan parameter distribusi severitas klaim terhadap *ultimate ruin probability*.
4. Bagaimana perbandingan aproksimasi dengan menggunakan teorema titik tetap Banach dan quasi-Monte Carlo dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dari segi akurasi dan waktu komputasi?

### 1.3 Ruang Lingkup Penelitian

Untuk menyederhanakan permasalahan tanpa mengurangi esensi dari permasalahan, maka dibuatlah pembatasan masalah. Ruang lingkup permasalahan yang dibahas pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Waktu kedatangan antarklaim diasumsikan berdistribusi eksponensial, sehingga model yang merepresentasikan *capital* perusahaan adalah model Cramér-Lundberg.
2. Distribusi severitas klaim yang digunakan adalah distribusi eksponensial, distribusi Weibull, dan distribusi Lomax.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memformulasikan *ultimate ruin probability* dengan menggunakan teorema titik tetap Banach.
2. Mengaproksimasi *ultimate ruin probability* dengan menggunakan formulasi *ultimate ruin probability* berdasarkan teorema titik tetap Banach dengan metode quasi-Monte Carlo.
3. Menganalisis pengaruh faktor *loading*, jenis distribusi severitas klaim, dan parameter distribusi terhadap *ultimate ruin probability*.
4. Membandingkan akurasi hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* dan waktu komputasi dengan menggunakan formulasi *ultimate ruin probability* berdasarkan teorema titik tetap Banach dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine.

### 1.5 Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi literatur dan simulasi numerik terhadap hasil yang diperoleh. Acuan literatur utama yang

digunakan dalam penulisan tugas akhir ini berjudul "Approximations of the ultimate ruin probability in the classical risk model using the Banach's fixed-point theorem and the continuity of the ruin probability" yang ditulis oleh Martínez Sánchez & Baltazar-Larios (2022).

## BAB 2 LANDASAN TEORI

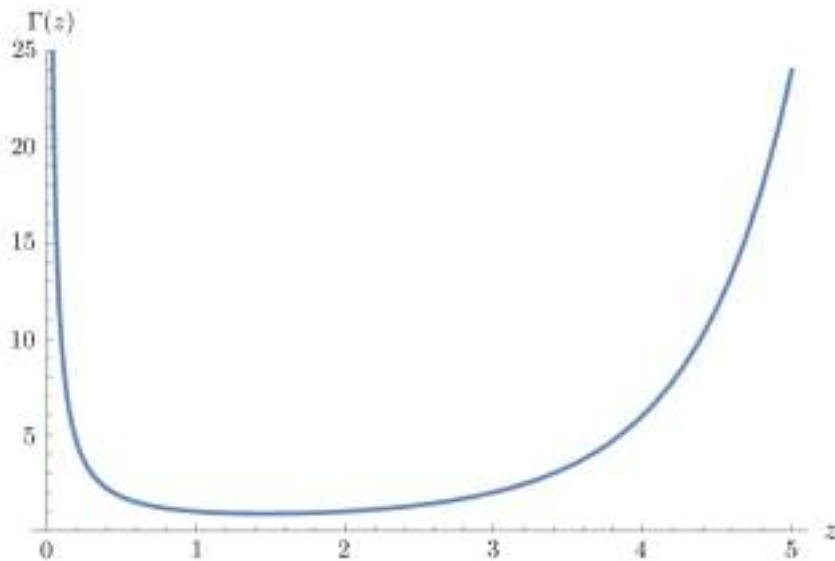
Bab ini membahas teori pendukung yang digunakan pada tugas akhir ini, yaitu fungsi Gama, karakteristik distribusi, distribusi probabilitas khusus, *maximum likelihood estimation*, *integrated tail distribution*, *compound distribution*, proses *compound Poisson*, *inverse transformation method*, metode regula falsi, ruang metrik, barisan fungsi, *ruin theory*, persamaan integral Volterra, teorema titik tetap Banach, dan metode quasi-Monte Carlo

### 2.1 Fungsi Gama

Fungsi gama merupakan suatu fungsi yang terdefinisi pada  $\mathbb{C}$ , kecuali untuk bilangan bulat nonpositif, dengan kodomain  $\mathbb{C}$ . Pada tugas akhir ini, yang digunakan hanyalah fungsi gama dengan domain bilangan riil positif  $\mathbb{R}^+$ . Untuk  $z > 0$ , fungsi gama didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.1)$$

Gambar 2.1 menunjukkan grafik fungsi gama.



Gambar 2.1: Grafik Fungsi Gama

Jika batas bawah dan batas atas integral dari fungsi (2.1) masing-masing tidak sama dengan 0 dan  $\infty$ , maka fungsi gamanya disebut sebagai *incomplete gamma function*. *Incomplete gamma function* terdiri atas 2 jenis, yang dibagi berdasarkan batas integralnya.

1. *Lower Incomplete Gamma Function*

Untuk  $z, z_0 \in \mathbb{R}^+$ , *lower incomplete gamma function* didefinisikan sebagai

$$\gamma(z, z_0) = \int_0^{z_0} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

## 2. Upper Incomplete Gamma Function

Untuk  $z, z_0 \in \mathbb{R}^+$ , *upper incomplete gamma function* didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z, z_0) = \int_{z_0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.3)$$

Dengan sifat penjumlahan integral, hubungan dari ketiga fungsi yang telah disebutkan adalah

$$\gamma(z, z_0) + \Gamma(z, z_0) = \Gamma(z). \quad (2.4)$$

Terdapat juga fungsi gama yang diregularisasi (*regularized incomplete gamma function*), yang dibagi menjadi *regularized lower incomplete gamma function* dan *regularized upper incomplete gamma function*.

### 1. Regularized Lower Incomplete Gamma Function

Untuk  $y, z \in \mathbb{R}^+$ , *regularized lower incomplete gamma function* berupa fungsi 2 variabel yang didefinisikan sebagai berikut

$$P(y, z) = \frac{\gamma(y, z)}{\Gamma(y)}. \quad (2.5)$$

### 2. Regularized Upper Incomplete Gamma Function

Untuk  $y, z \in \mathbb{R}^+$ , *regularized upper incomplete gamma function* berupa fungsi 2 variabel yang didefinisikan sebagai berikut

$$Q(y, z) = \frac{\Gamma(y, z)}{\Gamma(y)}. \quad (2.6)$$

(Olver et al., 2024)

## 2.2 Karakteristik Distribusi

Pada bagian ini, misalkan  $X$  adalah variabel acak kontinu dengan *support* positif dan *probability density function* (pdf)  $f_X(x)$ . Beberapa karakteristik dari  $X$  antara lain:

### 1. Momen nonsentral

Momen nonsentral dari  $X$  terdefinisi untuk  $n \in \mathbb{N}$ , dengan

$$\mu'_n = E[X^n] = \int_0^{\infty} x^n f_X(x) dx. \quad (2.7)$$

(Larsen &amp; Marx, 2005, pp. 150-154)

## 2. Variansi

Variansi dari  $X$  merupakan ekspektasi dari jarak kuadrat nilai  $X$  terhadap rata-ratanya,  $E[X]$ . Secara matematis, variansi dari  $X$  didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \mu'_2 - (\mu_1)^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

(Larsen &amp; Marx, 2005, pp. 155-156)

3. *Skewness*

*Skewness* dari  $X$  menyatakan kesimetrisan pdf dari  $X$ . Ketika *skewness* bernilai 0, maka distribusinya simetris. Ketika *skewness* bernilai positif, maka pdf dari  $X$  memiliki ekor kanan yang panjang. Secara matematis, *skewness* dari  $X$  didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E \left[ \left( \frac{X - E[X]}{\sigma} \right)^3 \right] \\ &= \frac{E[(X - E[X])^3]}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 3E[X](E[X])^2 - (E[X])^3}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 3E[X](E[X])^2 - (E[X])^3}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3}{\sigma^3}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

(Larsen &amp; Marx, 2005, p. 161)

## 4. Kurtosis

Kurtosis dari  $X$  menunjukkan eksistensi nilai *outlier* (nilai ekstrem) dan *peakedness* dari suatu pdf. Ketika nilai kurtosis besar, maka distribusinya memiliki *outlier* yang

lebih banyak. Secara matematis, kurtosis dari  $X$  didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma} \right)^4 \right] \\
&= \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4]}{(\text{Var}(X))^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X^4 - 4X^3\mathbb{E}[X] + 6X^2(\mathbb{E}[X])^2 - 4X(\mathbb{E}[X])^3 + (\mathbb{E}[X])^4]}{(\text{Var}(X))^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X^3]\mathbb{E}[X] + 6\mathbb{E}[X^2](\mathbb{E}[X])^2 - 4\mathbb{E}[X](\mathbb{E}[X])^3 + (\mathbb{E}[X])^4}{(\text{Var}(X))^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X^3]\mathbb{E}[X] + 6\mathbb{E}[X^2](\mathbb{E}[X])^2 - 3(\mathbb{E}[X])^4}{(\text{Var}(X))^2} \\
&= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu_2(\mu_1)^2 - 3(\mu_1)^4}{\sigma^4}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

(Larsen & Marx, 2005, p. 161)

### 5. *Heavy-tailed* dan *light-tailed*

Sebuah distribusi  $X$  dikatakan *heavy-tailed* ketika *moment generating function* (mgf) dari  $X$ , yang didefinisikan sebagai

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx,$$

bernilai  $\infty$  untuk semua  $t > 0$ . Kebalikan dari *heavy-tailed* adalah *light-tailed*, yaitu ketika  $M_X(t) < \infty$  untuk suatu  $t > 0$ . Jika  $\mathbb{E}[X^n]$  bernilai  $\infty$  untuk suatu  $n \in \mathbb{N}$ , maka jelas bahwa  $M_X(t)$  bernilai  $\infty$ . Namun,  $\mathbb{E}[X^n] < \infty$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  tidak menjamin bahwa distribusinya *light-tailed*. Kriteria lain yang dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu distribusi *heavy-tailed* atau tidak adalah jika persamaan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} S_X(x) = \infty \tag{2.11}$$

berlaku untuk semua  $t > 0$ , maka  $X$  *heavy-tailed*.

(Rolski et al., 2009, p. 49)

## 2.3 Distribusi Probabilitas Khusus

Pada bagian ini, disajikan beberapa distribusi probabilitas khusus yang digunakan pada tugas akhir ini.

### 2.3.1 Distribusi Probabilitas Diskrit

Distribusi probabilitas diskrit yang digunakan adalah distribusi Poisson dan binomial negatif.

### 2.3.1.1 Distribusi Poisson

Sebuah variabel acak  $X$  yang berdistribusi Poisson dengan parameter  $\lambda$  memiliki *probability mass function* (pmf) yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Pr(X = x) = p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

(Hogg et al., 2018, p. 167)

### 2.3.1.2 Distribusi Binomial Negatif

Sebuah variabel acak  $K$  yang berdistribusi binomial negatif memiliki parameter  $r$  dan  $p$ . Jika  $r$  berupa bilangan asli, maka parameter  $r$  menyatakan banyaknya kejadian sukses yang diinginkan, sedangkan  $p$  menyatakan probabilitas kejadian sukses untuk tiap percobaan. Oleh karena itu, pada kasus  $r$  berupa bilangan asli, distribusi binomial negatif dapat dipandang sebagai banyak percobaan yang gagal hingga memperoleh  $r$  kejadian sukses. Distribusi binomial negatif memiliki pmf yang didefinisikan sebagai berikut

$$\Pr(K = k) = p(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Distribusi geometrik merupakan kasus khusus dari distribusi binomial negatif, dengan  $r = 1$ . Pmf dari distribusi geometrik didefinisikan sebagai:

$$p(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(Hogg et al., 2018, p. 159)

Untuk  $K \sim \text{NB}(r, p)$ , berlaku  $E[K] = \frac{r(1-p)}{p}$ .

**Bukti.** Diberikan pmf distribusi binomial negatif adalah  $p_1(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} E[K] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_1(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{r} \binom{k+r-1}{r-1} p^{r+1} (1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{k}{r} \binom{k+r-1}{r-1} = \frac{k}{r} \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} = \frac{(k+r-1)!}{(k-1)!r!} = \binom{k+r-1}{r},$$

sehingga

$$E[K] = \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} p^{r+1} (1-p)^{k-1}.$$

Misalkan  $h = k - 1$ , sehingga  $k = h + 1$ . Akibatnya, batas bawah sumasinya menjadi  $h = 0$  dan sumasinya menjadi

$$\begin{aligned} E[K] &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+1+r-1}{r} p^{r+1} (1-p)^h \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+1+r-1}{r} p^{r+1} (1-p)^h \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+(r+1)-1}{r} p^{r+1} (1-p)^h. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $p_2(h) = \binom{h+(r+1)-1}{r-1} p^{r+1} (1-p)^h$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$  berupa pmf untuk  $H \sim \text{NB}(r+1, h)$ , sehingga  $\sum_{h=0}^{\infty} p_2(h) = 1$ . Dengan demikian, diperoleh

$$E[K] = \frac{r(1-p)}{p}. \quad (2.14)$$

□

### 2.3.2 Distribusi Probabilitas Kontinu

Distribusi probabilitas kontinu yang digunakan adalah distribusi uniform kontinu, gamma, eksponensial, Weibull, dan Lomax.

#### 2.3.2.1 Distribusi Uniform Kontinu

Sebuah variabel acak  $X$  yang berdistribusi uniform kontinu dengan parameter batas bawah  $a$  dan batas bawah  $b$  dengan  $a < b$  ( $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ ) memiliki pdf yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.15)$$

Kasus khusus dari distribusi uniform kontinu adalah distribusi uniform standar, yaitu ketika  $b = 1$  dan  $a = 0$ .

(Walpole et al., 2016, p. 191)

#### 2.3.2.2 Distribusi Gama

Sebuah variabel acak  $X$  yang berdistribusi gama memiliki dua parameter, yang keduanya bernilai positif. Terdapat dua jenis pendefinisian parameter distribusi gama, yaitu *shape*

$\alpha$  dengan *scale*  $k$  dan *shape*  $\alpha$  dengan *rate*  $\beta$ . Hubungan antara  $k$  dan  $\beta$  adalah  $k = \frac{1}{\beta}$ . Pada tugas akhir ini, digunakan definisi distribusi gama dengan parameter *shape* dan *rate*. Pdf dari distribusi gama ( $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0. \quad (2.16)$$

(Hogg et al., 2018, pp. 173-178)

*Cumulative distribution function* (cdf) dari distribusi gama adalah

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} = P(\alpha, \beta x), \quad x > 0. \quad (2.17)$$

Berikut adalah karakteristik dari distribusi gama.

1. Momen nonsentral

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_0^\infty x^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} dx \end{aligned}$$

Dengan substitusi  $u = \beta x$ , maka  $dx = \frac{du}{\beta}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta}\right)^{\alpha+n-1} e^{-u} \frac{du}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta^n \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+n-1} e^{-u} du. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tinjau 2 kasus, yaitu ketika  $\alpha \in \mathbb{N}$  dan  $\alpha \notin \mathbb{N}$ .

- $\alpha \in \mathbb{N}$

Perhatikan bahwa  $\frac{d^{\alpha+n}}{du^{\alpha+n}}(u^{\alpha+n-1}) = 0$  dan  $e^{-u}$  terintegralkan, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(u) = u^{\alpha+n-1}$  dan  $w^{(\alpha+n)}(u) = e^{-u}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{\alpha+n-1} e^{-u} du &= [-u^{\alpha+n-1} e^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u} (\alpha+n-1) u^{\alpha+n-2} du \\ &= [-u^{\alpha+n-1} e^{-u}]_0^\infty + (\alpha+n-1) [-u^{\alpha+n-2} e^{-u}]_0^\infty \\ &\quad + (\alpha+n-1) \int_0^\infty e^{-u} (\alpha+n-2) u^{\alpha+n-3} du. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$[-u^{\alpha+n-2} e^{-u}]_0^\infty$  berupa notasi untuk  $\lim_{b \rightarrow \infty} [-u^{\alpha+n-2} e^{-u}]_0^b$ . Integral parsial

dapat dilakukan terus menerus hingga pangkat dari  $u$  pada integran bernilai 0.

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha+n-1} e^{-u} du = \left[ \sum_{i=1}^{\alpha+n} -\frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha+n-i)!} u^{\alpha+n-i} e^{-u} \right]_0^{\infty}. \quad (2.20)$$

Berlaku  $\alpha+n > i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, \alpha+n-1$ . Akibatnya,  $u^{\alpha+n-i}$  bernilai 0 untuk  $u = 0$  dan untuk semua  $i = 1, 2, \dots, \alpha+n-1$ . Selain itu, berlaku juga  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{\alpha+n-i} e^{-u} = 0$ . Jadi, suku yang tersisa hanyalah ketika  $u = 0$  dan  $i = \alpha+n$ . Persamaan (2.20) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha+n-1} e^{-u} du = \Gamma(\alpha+n). \quad (2.21)$$

Dengan substitusi dari persamaan (2.21) ke persamaan (2.18), diperoleh bentuk dari momen nonsentral untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dan  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

$$E[X^n] = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\beta^n \Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\beta^n} \prod_{k=1}^n (\alpha+n-k). \quad (2.22)$$

- $\alpha \notin \mathbb{N}$

Perhatikan bahwa  $\frac{d^{[\alpha]+n}}{du^{[\alpha]+n}}(u^{\alpha+n-1}) = u^{\alpha-[\alpha]-1}$  dan  $e^{-u}$  terintegralkan, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(u) = u^{\alpha+n-1}$  dan  $w^{([\alpha]+n)}(u) = e^{-u}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{\alpha+n-1} e^{-u} du &= [-u^{\alpha+n-1} e^{-u}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u} (\alpha+n-1) u^{\alpha+n-2} du \\ &= [-u^{\alpha+n-1} e^{-u}]_0^{\infty} + (\alpha+n-1) [-u^{\alpha+n-2} e^{-u}]_0^{\infty} \\ &\quad + (\alpha+n-1) \int_0^{\infty} e^{-u} (\alpha+n-2) u^{\alpha+n-3} du. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Integral parsial dapat dilakukan terus menerus hingga pangkat dari  $u$  pada integran bernilai di antara  $-1$  dan  $0$ , sedemikian sehingga integral yang tersisa menjadi fungsi gama.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{\alpha+n-1} e^{-u} du &= \left[ \sum_{i=1}^{[\alpha]+n} -\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n-i+1)} u^{\alpha+n-i} e^{-u} \right]_0^{\infty} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha-[\alpha])} \int_0^{\infty} u^{\alpha-[\alpha]-1} e^{-u} du. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Karena  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , maka  $\alpha > [\alpha]$ , sehingga  $\alpha+n > i$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, [\alpha]+n$ . Akibatnya,  $u^{\alpha+n-i}$  bernilai 0 untuk  $u = 0$  dan untuk semua  $i = 1, 2, \dots, [\alpha]+n$ . Selain itu, berlaku juga  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{\alpha+n-i} e^{-u} = 0$ . Dengan definisi fungsi gamma

(2.1), berlaku  $\int_0^\infty u^{\alpha-[\alpha]-1}e^{-u} du = \Gamma(\alpha - [\alpha])$ . Jadi, persamaan (2.24) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^\infty u^{\alpha+n-1}e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha-[\alpha])}\Gamma(\alpha-[\alpha]) = \Gamma(\alpha+n). \quad (2.25)$$

Dengan substitusi dari persamaan (2.25) ke persamaan (2.18), diperoleh bentuk dari momen nonsentral untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dan  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,

$$E[X^n] = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\beta^n \Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\beta^n} \prod_{k=1}^n (\alpha+n-k). \quad (2.26)$$

## 2. Variansi

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.26) dan variansi (2.8),

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mu'_2 - (\mu'_1)^2 \\ &= \frac{1}{\beta^2}(\alpha+1)\alpha - \left(\frac{1}{\beta}\alpha\right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 3. Skewness

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.26) dan *skewness* (2.9),

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3}{\sigma^3} \\ &= \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\beta^3}(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha - 3\frac{1}{\beta^3}(\alpha+1)\alpha^2 + 2\frac{1}{\beta^3}\alpha^3\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 4. Kurtosis

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.26) dan kurtosis (2.10),

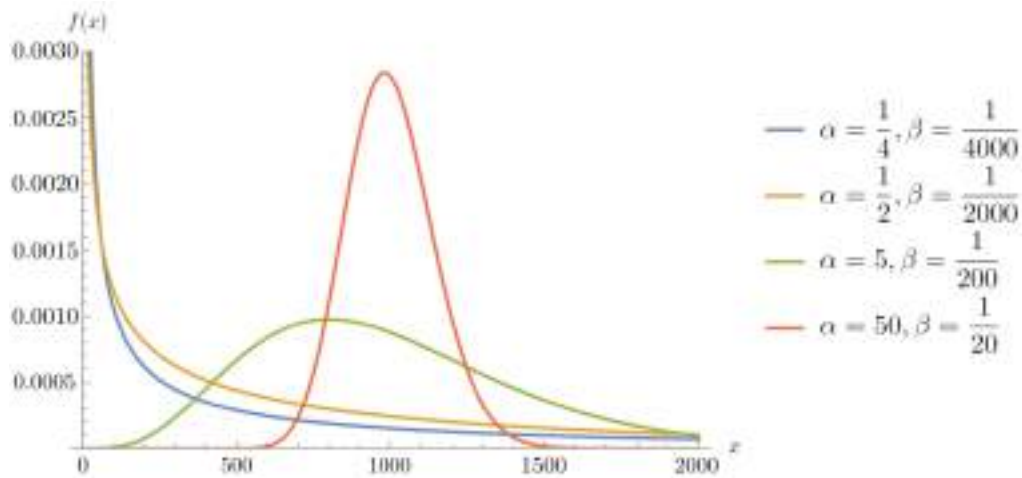
$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{\beta^4}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\beta^4}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha - 4\frac{1}{\beta^4}(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha^2 + 6\frac{1}{\beta^4}(\alpha+1)\alpha^3 - 3\frac{\alpha^4}{\beta^4}\right) \\ &= \frac{6}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Tabel 2.1 merangkum karakteristik dari distribusi gama.

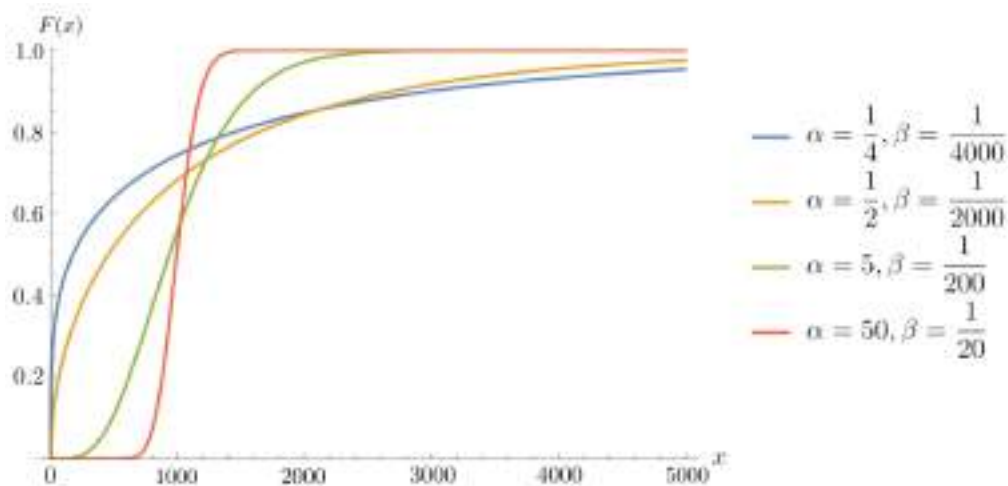
Tabel 2.1: Karakteristik Distribusi Gama

$E[X^n]$	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\beta^n \Gamma(\alpha)}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{6}{\alpha}$

Pada Gambar 2.2 dan 2.3, diberikan contoh grafik pdf dan cdf dari distribusi gama dengan beberapa pilihan parameter, dengan parameter dipilih sedemikian sehingga rata-ratanya bernilai 1.000.



Gambar 2.2: Grafik Pdf Distribusi Gama



Gambar 2.3: Grafik Cdf Distribusi Gama

Berdasarkan Gambar 2.2, kenaikan nilai  $\alpha$  menyebabkan pdfnya lebih simetris. Hal ini sesuai dengan *skewness*-nya, yaitu  $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ . Selain itu, berlaku  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  ketika  $\alpha < 1$  dan  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  ketika  $\alpha > 1$ . Hal ini sesuai dengan pdfnya (2.16) karena

terdapat suku  $x^{\alpha-1}$ .

Jika dilihat dari cdfnya pada Gambar 2.3, kenaikan nilai  $\beta$  mengurangi probabilitas terjadinya klaim yang terlalu besar dan terlalu kecil. Hal ini bersesuaian dengan variansi dari distribusi gama (2.1), di mana kenaikan nilai  $\beta$  mengurangi variansi. Selain itu,  $\alpha$  yang lebih besar mengakibatkan distribusinya memiliki ekor yang lebih tipis. Bentuk dari cdf juga berbeda berdasarkan nilai  $\alpha$ . Ketika  $\alpha > 1$ , cdfnya memiliki titik *inflection*, sedangkan berlaku sebaliknya untuk  $\alpha < 1$ .

### 2.3.2.3 Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial adalah kasus khusus dari distribusi gama dengan parameter *shape* bernilai 1. Pdf dari distribusi eksponensial dengan parameter  $\beta$  ( $X \sim \text{Exp}(\beta)$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0. \quad (2.30)$$

Cdf dari distribusi eksponensial adalah

$$F(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta t} dt = 1 - e^{-\beta x}, \quad x > 0. \quad (2.31)$$

(Hogg et al., 2018, pp. 173-178)

Karena distribusi eksponensial berupa kasus khusus dari distribusi gama, maka karakteristiknya dapat diperoleh dengan rumus dari karakteristik distribusi gama.

#### 1. Momen nonsentral

Dengan menggunakan persamaan (2.26) dan  $\alpha = 1$ , diperoleh

$$E[X^n] = \frac{\Gamma(1+n)}{\beta^n \Gamma(1)} = \frac{n!}{\beta^n}. \quad (2.32)$$

#### 2. Variansi

Dengan menggunakan persamaan (2.27) dan  $\alpha = 1$ , diperoleh

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}. \quad (2.33)$$

#### 3. *Skewness*

Dengan menggunakan persamaan (2.28) dan  $\alpha = 1$ , diperoleh

$$\gamma_1 = 2. \quad (2.34)$$

## 4. Kurtosis

Dengan menggunakan persamaan (2.29) dan  $\alpha = 1$ , diperoleh

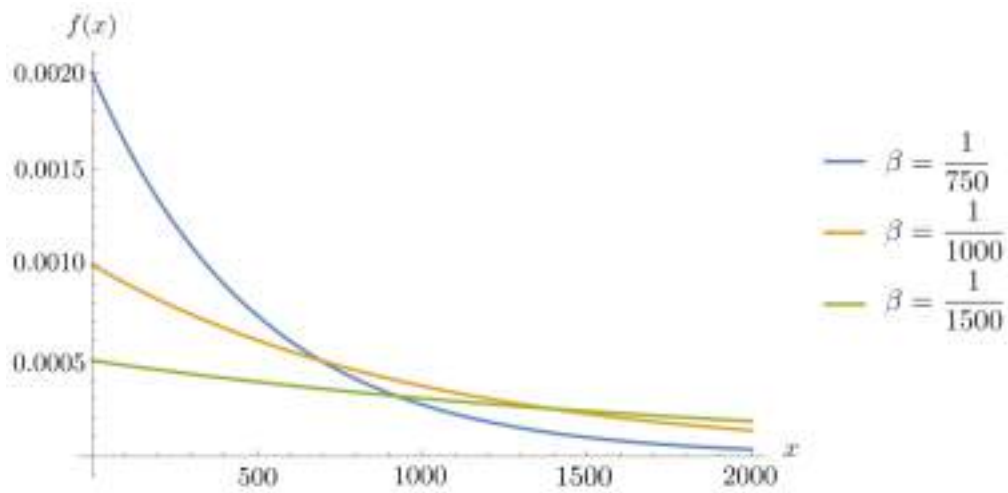
$$\gamma_2 = 6. \quad (2.35)$$

Tabel 2.2 merangkum karakteristik dari distribusi eksponensial.

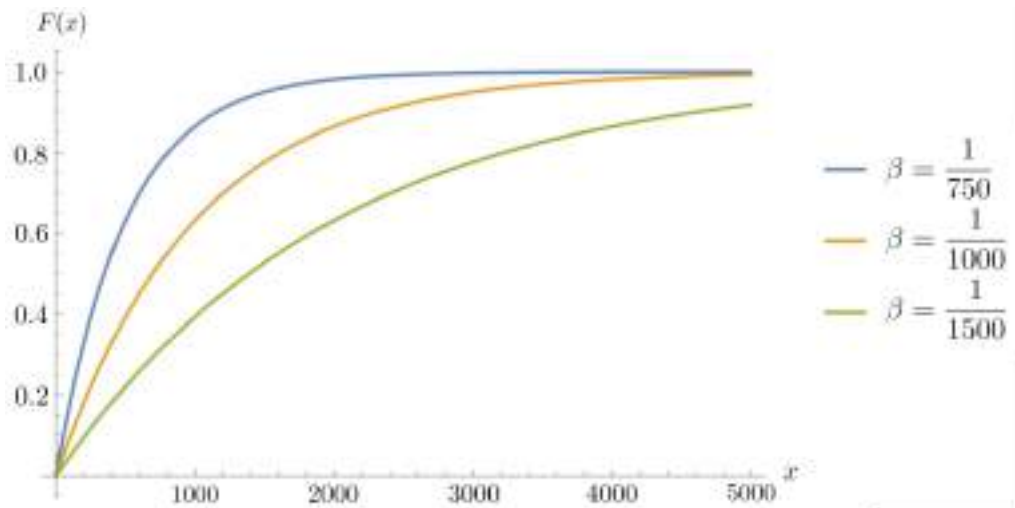
Tabel 2.2: Karakteristik Distribusi Eksponensial

$E[X^n]$	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\frac{n!}{\beta^n}$	$\frac{1}{\beta^2}$	2	6

Pada Gambar 2.4 dan 2.5, diberikan contoh grafik pdf dan cdf dari distribusi eksponensial dengan beberapa pilihan parameter.



Gambar 2.4: Grafik Pdf Distribusi Eksponensial



Gambar 2.5: Grafik Cdf Distribusi Ekspensial

Berdasarkan Gambar 2.4, kenaikan nilai  $\beta$  menyebabkan pdfnya menjadi lebih curam. Hal ini dapat dilihat berdasarkan densitas pada beberapa titik. Ketika  $x \rightarrow 0$ , nilai  $f(x)$  semakin tinggi untuk  $\beta$  yang lebih tinggi. Sebaliknya, pada  $x = 2.000$ , nilai  $f(x)$  semakin tinggi untuk  $\beta$  yang lebih rendah. Jika dilihat dari cdfnya pada Gambar 2.5, kenaikan nilai  $\beta$  mengurangi probabilitas terjadinya klaim yang besar. Hal ini bersesuaian dengan variansi dari distribusi eksponensial (2.2) karena probabilitas nilai ekstrim yang tinggi meningkatkan variansi.

#### 2.3.2.4 Distribusi Weibull

Sebuah variabel acak  $X$  yang berdistribusi Weibull memiliki dua parameter, yaitu  $\lambda$  dan  $k$ , dengan keduanya bernilai positif. Pdf dari distribusi Weibull ( $X \sim \text{Weibull}(\lambda, k)$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right], \quad x > 0. \quad (2.36)$$

Cdf dari distribusi Weibull adalah

$$F(x) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right], \quad x > 0. \quad (2.37)$$

(Van et al., 2012, pp. 191-192)

Berikut adalah karakteristik dari distribusi Weibull.

1. Momen nonsentral

$$E[X^n] = \int_0^{\infty} x^n \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right] dx$$

Dengan substitusi  $u = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \rightarrow du = \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} dx$ , serta  $x = \lambda u^{\frac{1}{k}}$ , diperoleh

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_0^\infty (\lambda u^{\frac{1}{k}})^n e^{-u} du \\ &= \lambda^n \int_0^\infty u^{\frac{n}{k}} e^{-u} du \end{aligned} \quad (2.38)$$

Tinjau 2 kasus, yaitu  $n = mk$  untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$  dan  $n \neq mk$  untuk semua  $m \in \mathbb{N}$ .

- $n = mk$  untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$

Jika kasus ini berlaku, maka  $\frac{n}{k}$  berupa suatu bilangan asli, yakni  $m$ . Perhatikan bahwa  $\frac{d^{m+1}}{du^{m+1}}(u^m) = 0$  dan  $e^{-u}$  terintegralkan, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(u) = u^m$  dan  $w^{(m+1)}(u) = e^{-u}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^m e^{-u} du &= [-u^m e^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty m e^{-u} u^{m-1} du \\ &= [-u^m e^{-u}]_0^\infty + m[-u^{m-1} e^{-u}]_0^\infty + m \int_0^\infty e^{-u} (m-1) u^{m-2} du \\ &\quad \vdots \\ &= \left[ \sum_{i=0}^m -\frac{m!}{(m-i)!} u^{m-i} e^{-u} \right]_0^\infty. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Perhatikan bahwa untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$  dan  $u = 0$ , berlaku  $u^{m-i} = 0$ . Selain itu, untuk semua  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , berlaku  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{m-i} e^{-u} = 0$ . Oleh karena itu, persamaan (2.39) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^\infty u^m e^{-u} du = m!. \quad (2.40)$$

Substitusi hasil integral (2.40) ke persamaan (2.38).

$$E[X^n] = \lambda^n \left(\frac{n}{k}\right)! = \lambda^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right). \quad (2.41)$$

- $n \neq mk$  untuk semua  $m \in \mathbb{N}$

Jika kasus ini berlaku, maka  $\frac{n}{k}$  bukan berupa suatu bilangan asli. Perhatikan bahwa  $\frac{d^{\lceil \frac{n}{k} \rceil}}{du^{\lceil \frac{n}{k} \rceil}}(u^{\frac{n}{k}}) = u^{\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil}$  dan  $e^{-u}$  terintegralkan, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(u) = u^{\frac{n}{k}}$  dan  $w^{(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1)}(u) = e^{-u}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{\frac{n}{k}} e^{-u} du &= [-u^{\frac{n}{k}} e^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{k} e^{-u} u^{\frac{n}{k}-1} du \\ &= [-u^{\frac{n}{k}} e^{-u}]_0^\infty + \frac{n}{k} [-u^{\frac{n}{k}-1} e^{-u}]_0^\infty + \frac{n}{k} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{n}{k} - 1\right) u^{\frac{n}{k}-2} du. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Integral parsial dapat dilakukan terus menerus hingga pangkat dari  $u$  pada integran bernilai di antara  $-1$  dan  $0$ , sedemikian sehingga integral yang tersisa menjadi fungsi gamma.

$$\int_0^\infty u^{\frac{n}{k}} e^{-u} du = \left[ \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1} -\frac{\Gamma(1 + \frac{n}{k})}{\Gamma(1 + \frac{n}{k} - i)} u^{\frac{n}{k} - i} e^{-u} \right]_0^\infty \quad (2.43)$$

$$+ \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{k})}{\Gamma(\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil + 1)} \int_0^\infty u^{\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil} e^{-u} du.$$

Karena  $\frac{n}{k} \notin \mathbb{N}$ , maka  $\frac{n}{k} > \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ , sehingga  $\frac{n}{k} > i$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ . Akibatnya,  $u^{\frac{n}{k} - i}$  bernilai  $0$  untuk  $u = 0$  dan untuk semua  $i = 1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ . Selain itu, berlaku juga  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{\frac{n}{k} - i} e^{-u} = 0$ . Dengan definisi fungsi gamma (2.1), berlaku  $\int_0^\infty u^{\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil} e^{-u} du = \int_0^\infty u^{\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil + 1 - 1} e^{-u} du = \Gamma(\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil + 1)$ . Jadi, persamaan (2.43) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^\infty u^{\frac{n}{k} - 1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{k})}{\Gamma(\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil + 1)} \Gamma\left(\frac{n}{k} - \lceil \frac{n}{k} \rceil + 1\right) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right). \quad (2.44)$$

Dengan substitusi dari persamaan (2.44) ke persamaan (2.38), diperoleh bentuk dari momen nonsentral untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dan  $\frac{n}{k} \notin \mathbb{N}$ .

$$E[X^n] = \lambda^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right). \quad (2.45)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, misalkan  $\Gamma_i = \Gamma\left(1 + \frac{i}{k}\right)$ .

## 2. Variansi

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.41) dan variansi (2.8),

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mu'_2 - (\mu'_1)^2 \\ &= \lambda^2 \Gamma_2 - (\lambda \Gamma_1)^2 \\ &= \lambda^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2). \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 3. Skewness

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.41) dan *skewness* (2.9),

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{\lambda^3 \Gamma_3 - 3\lambda^3 \Gamma_2 \Gamma_1 + 2\lambda^3 \Gamma_1^3}{[\lambda^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

## 4. Kurtosis

Dengan menggunakan formula momen nonsentral (2.41) dan kurtosis (2.10),

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu_2(\mu_1)^2 - 3(\mu_1)^4}{\sigma^4} \\
&= \frac{\lambda^4\Gamma_4 - 4\lambda^4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\lambda^4\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\lambda^4\Gamma_1^4}{[\lambda^2(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)]^2} \\
&= \frac{\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\Gamma_1^4}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Tabel 2.3 merangkum karakteristik dari distribusi Weibull.

Tabel 2.3: Karakteristik Distribusi Weibull

$E[X^n]$	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\lambda^n\Gamma_n$	$\lambda^2(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)$	$\frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\Gamma_1^4}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2}$

Selanjutnya, dibuktikan lema berikut mengenai sifat *tail* dari distribusi Weibull.

**Lema 2.1.** Distribusi Weibull merupakan distribusi *heavy-tailed* untuk  $k < 1$  dan distribusi *light-tailed* untuk  $k \geq 1$ .

**Bukti.** Untuk membuktikan sifat *tail* dari distribusi Weibull, digunakan persamaan (2.11).

- $k < 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ tx - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right] = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ tx - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right].$$

Karena derajat dari  $tx$  lebih tinggi dari  $\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k$ , maka  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ tx - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \right] = \infty$ , sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right] = \infty.$$

- $k \geq 1$

Pada kasus ini, cukup tinjau kasus  $k = 1$  karena  $\exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right] < \exp \left( - \frac{x}{\lambda} \right)$  untuk  $k > 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp \left( - \frac{x}{\lambda} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left( tx - \frac{x}{\lambda} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ x \left( t - \frac{1}{\lambda} \right) \right].$$

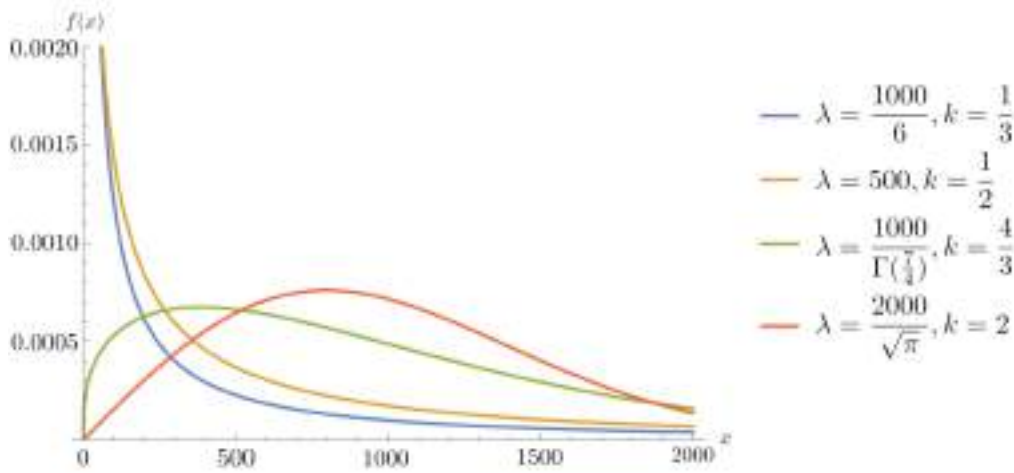
Dapat dilihat bahwa jika  $t < \frac{1}{\lambda}$ , maka pangkatnya bernilai negatif, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left[x\left(t - \frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0.$$

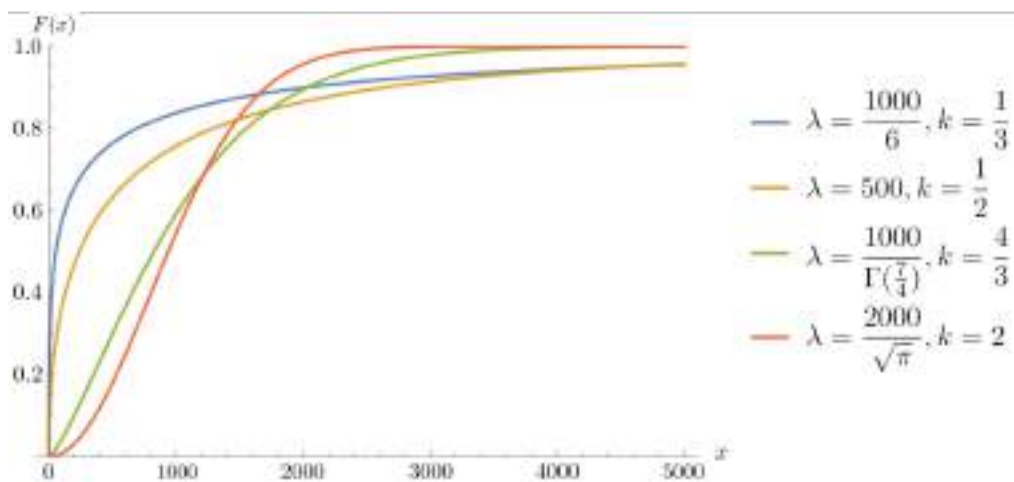
Dengan pertidaksamaan  $\exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] < \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ , berlaku  $0 < e^{tx} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] < e^{tx} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ . Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = 0$ , maka dengan teorema apit,  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] = 0$  untuk  $k > 1$  (Aguilar, 2022, p. 154).

□

Pada Gambar 2.6 dan 2.7, diberikan contoh grafik pdf dan cdf dari distribusi Weibull dengan beberapa pilihan parameter., dengan parameter dipilih sedemikian sehingga rata-ratanya bernilai 1.000.



Gambar 2.6: Grafik Pdf Distribusi Weibull



Gambar 2.7: Grafik Cdf Distribusi Weibull

Berdasarkan Gambar 2.6, kenaikan nilai  $\lambda$  menyebabkan pdfnya lebih simetris. Selain

itu, berlaku  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  ketika  $k < 1$  dan  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  ketika  $k > 1$ . Hal ini sesuai dengan pdfnya (2.36) karena terdapat suku  $x^{k-1}$ . Jika dilihat dari cdfnya pada Gambar 2.7, kenaikan nilai  $\lambda$  mengurangi probabilitas terjadinya klaim yang terlalu besar dan terlalu kecil. Selain itu, kenaikan  $\lambda$  menyebabkan distribusinya menjadi lebih *light-tailed*.

### 2.3.2.5 Distribusi Lomax

Sebuah variabel acak  $X$  yang berdistribusi Lomax memiliki dua parameter, yaitu  $\lambda$  dan  $\alpha$ , dengan keduanya bernilai positif. Pdf dari distribusi Lomax ( $X \sim \text{Lomax}(\lambda, \alpha)$ ) didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(x + \lambda)^{\alpha+1}}, \quad x > 0. \quad (2.49)$$

Cdf dari distribusi Lomax adalah

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{(x + \lambda)^\alpha}, \quad x > 0. \quad (2.50)$$

(Van et al., 2012, pp. 154-155)

Berikut adalah karakteristik dari distribusi Lomax.

1. Momen nonsentral

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_0^\infty x^n \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(x + \lambda)^{\alpha+1}} dx \\ &= \alpha \lambda^\alpha \int_0^\infty \frac{x^n}{(x + \lambda)^{\alpha+1}} dx. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Tinjau 2 kasus, yaitu  $\alpha > n$  dan  $\alpha \leq n$ .

- $\alpha > n$

Perhatikan bahwa  $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^n) = 0$  dan  $(x + \lambda)^{-\alpha-1}$  terintegralkan, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(x) = x^n$  dan  $w^{(n+1)}(x) = (x + \lambda)^{-\alpha-1}$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx &= \left[ -\frac{x^n}{\alpha(x+\lambda)^\alpha} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(x+\lambda)^\alpha} dx \\
&= \left[ -\frac{x^n}{\alpha(x+\lambda)^\alpha} \right]_0^{\infty} + \left[ -\frac{nx^{n-1}}{\alpha(\alpha-1)(x+\lambda)^{\alpha-1}} \right]_0^{\infty} \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{\alpha(\alpha-1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(x+\lambda)^{\alpha-1}} dx \\
&\quad \vdots \\
&= \left[ \sum_{i=0}^n -\frac{\Gamma(\alpha-i)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{n!}{(n-i)!} \frac{x^{n-i}}{(x+\lambda)^{\alpha-i}} \right]_0^{\infty}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Jika  $\alpha > n$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-i}}{(x+\lambda)^{\alpha-i}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Selain itu, berlaku juga  $x^{n-i} = 0$  untuk  $x = 0$  dan  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Oleh karena itu, integral (2.52) menjadi

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx = \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{n!}{\lambda^{\alpha-n}}. \tag{2.53}$$

Substitusi persamaan (2.53) ke persamaan (2.51).

$$E[X^n] = \alpha \lambda^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{n!}{\lambda^{\alpha-n}} = \frac{\lambda^n \Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.54}$$

- $\alpha \leq n$

Jika  $\alpha \leq n$ , maka dapat dilakukan substitusi  $u = x + \lambda$ , sehingga integralnya dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx &= \int_\lambda^{\infty} \frac{(u-\lambda)^n}{u^{\alpha+1}} du \\
&= \int_\lambda^{\infty} \frac{1}{u^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \lambda^{n-k} du \\
&= \int_\lambda^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} du.
\end{aligned}$$

Tinjau 2 kasus, yaitu  $\alpha \in \mathbb{N}$  dan  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Untuk  $\alpha \in \mathbb{N}$ , berlaku

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx &= \int_\lambda^\infty \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} du \\ &= \int_\lambda^\infty \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} + \frac{1}{u} + \sum_{k=\alpha+1}^n \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} du \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} + \ln u + \sum_{k=\alpha+1}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} \right]_\lambda^\infty. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa karena  $\lambda$  konstan dan positif, hasil integral tersebut bernilai berhingga ketika  $u = \lambda$ . Selain itu,  $\sum_{k=\alpha+1}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k}$  berupa polinomial dengan derajat  $n - \alpha$  dan koefisien dari derajat tertingginya bernilai 1. Oleh karena itu, berlaku

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{k=\alpha+1}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} = \infty.$$

Dapat dilihat juga bahwa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{k-\alpha} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \alpha - 1.$$

Akibatnya,  $\int_0^\infty \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx$  divergen menuju tak hingga.

Untuk  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , berlaku

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx &= \int_\lambda^\infty \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} du \\ &= \int_\lambda^\infty \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} + \sum_{k=[\alpha]}^n \binom{n}{k} u^{k-\alpha-1} \lambda^{n-k} du \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} + \sum_{k=[\alpha]}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} \right]_\lambda^\infty. \end{aligned}$$

Dengan argumen serupa, Perhatikan bahwa karena  $\lambda$  konstan dan positif, hasil integral tersebut bernilai berhingga ketika  $u = \lambda$ . Selain itu,  $\sum_{k=[\alpha]}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k}$  berupa fungsi dengan pangkat tertinggi dari  $u$  adalah

$n - \alpha$  dan koefisien dari derajat tertingginya bernilai 1. Oleh karena itu, berlaku

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^n \binom{n}{k} \frac{u^{k-\alpha}}{k-\alpha} \lambda^{n-k} = \infty.$$

Dapat dilihat juga bahwa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{k-\alpha} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1.$$

Akibatnya,  $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} dx$  divergen menuju tak hingga.

Dengan demikian,  $E[X^n] = \infty$  untuk  $\alpha \leq n$ .

## 2. Variansi

Eksistensi variansi mengikuti eksistensi momen nonsentral ke-1 dan momen nonsentral ke-2. Untuk memperoleh formula untuk variansi, digunakan formula momen nonsentral (2.54) dan variansi (2.8).

- $\alpha > 2$

Ketika  $\alpha > 2$ , momen nonsentral ke-1 dan ke-2 ada,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mu'_2 - (\mu'_1)^2 \\ &= \frac{\lambda^2 \Gamma(3) \Gamma(\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)} - \left( \frac{\lambda \Gamma(2) \Gamma(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \\ &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} - \frac{\lambda^2}{(\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

- $1 < \alpha \leq 2$

Ketika  $1 < \alpha \leq 2$ , momen nonsentral ke-1 ada, sedangkan momen nonsentral ke-2 bernilai tak hingga. Oleh karena itu,  $\text{Var}(X)$  bernilai tak hingga.

- $\alpha \leq 1$

Ketika  $\alpha \leq 1$ , momen nonsentral ke-1 dan ke-2 bernilai tak hingga. Akibatnya, variansinya berupa pengurangan momen nonsentral ke-1 yang bernilai tak hingga terhadap momen nonsentral ke-2 yang bernilai tak hingga juga. Akibatnya,  $\text{Var}(X)$  tidak terdefinisi.

## 3. Skewness

Eksistensi *skewness* mengikuti eksistensi momen nonsentral ke-1 hingga momen nonsentral ke-3. Untuk memperoleh formula untuk *skewness*, digunakan formula momen nonsentral (2.54) dan variansi (2.9).

- $\alpha > 3$

Ketika  $\alpha > 3$ , momen nonsentral ke-1 hingga ke-3 ada,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3}{\sigma^3} \\
&= \left( \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}{\alpha\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\lambda^3\Gamma(4)\Gamma(\alpha-3)}{\Gamma(\alpha)} - 3 \frac{\lambda^2\Gamma(3)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \frac{\lambda\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \right)^3 \right] \\
&= \frac{(\alpha-1)^3(\alpha-2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{6}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} - \frac{6}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} + \frac{2}{(\alpha-1)^3} \right] \\
&= \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3} \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

- $2 < \alpha \leq 3$

Ketika  $2 < \alpha \leq 3$ , momen nonsentral ke-1 dan ke-2 ada, sedangkan momen nonsentral ke-3 bernilai tak hingga. Oleh karena itu,  $\gamma_1$  bernilai tak hingga.

- $\alpha \leq 2$

Ketika  $\alpha \leq 2$ , momen nonsentral ke-2 dan ke-3 bernilai tak hingga. Terdapat pengurangan momen nonsentral ke-2 yang bernilai tak hingga terhadap momen nonsentral ke-3 yang bernilai tak hingga juga. Akibatnya,  $\gamma_1$  tidak terdefinisi.

#### 4. Kurtosis

Eksistensi kurtosis mengikuti eksistensi momen nonsentral ke-1 hingga momen nonsentral ke-4. Untuk memperoleh formula untuk kurtosis, digunakan formula momen nonsentral (2.54) dan kurtosis (2.10).

- $\alpha > 4$

Ketika  $\alpha > 4$ , momen nonsentral ke-1 hingga ke-4 ada.

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu_2(\mu_1)^2 - 3(\mu_1)^4}{\sigma^4} \\
&= \left( \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}{\alpha\lambda^2} \right)^2 \left[ \frac{\lambda^4\Gamma(5)\Gamma(\alpha-4)}{\Gamma(\alpha)} - 4 \frac{\lambda^3\Gamma(4)\Gamma(\alpha-3)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + 6 \frac{\lambda^2\Gamma(3)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{\lambda\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 - 3 \left( \frac{\lambda\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \right)^4 \right] \\
&= \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

- $3 < \alpha \leq 4$

Ketika  $3 < \alpha \leq 4$ , momen nonsentral ke-1 hingga ke-3 ada, sedangkan momen nonsentral ke-4 bernilai tak hingga. Oleh karena itu,  $\gamma_2$  bernilai tak hingga.

- $\alpha \leq 3$

Ketika  $\alpha \leq 3$ , momen nonsentral ke-3 dan ke-4 bernilai tak hingga. Terdapat pengurangan pengurangan momen nonsentral ke-3 yang bernilai tak hingga terhadap momen nonsentral ke-4 yang bernilai tak hingga juga. Akibatnya,  $\gamma_2$  tidak terdefinisi.

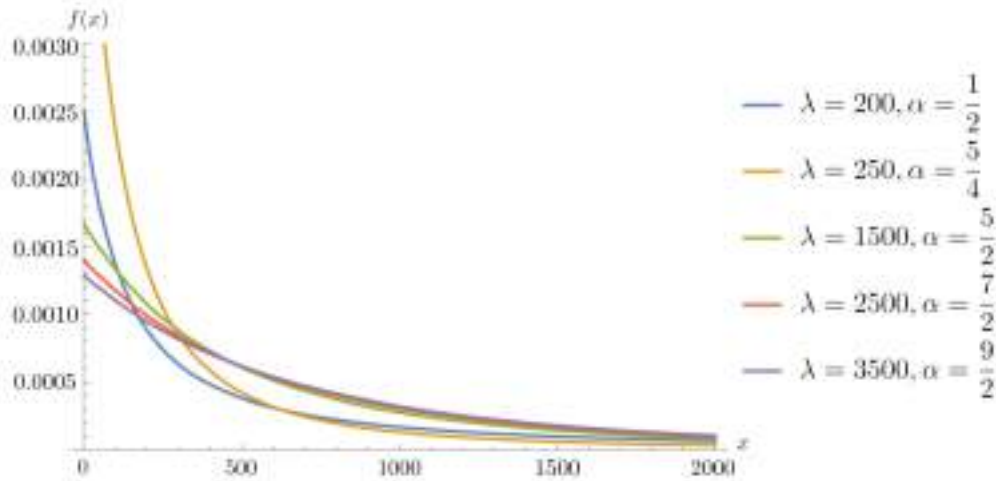
Tabel 2.4 merangkum karakteristik dari distribusi Lomax.

Tabel 2.4: Karakteristik Distribusi Lomax

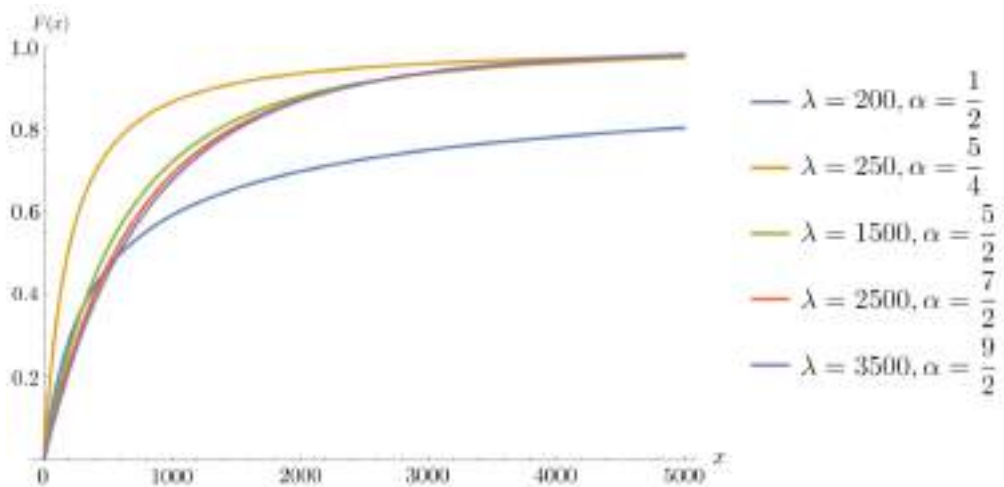
$E[X^n]$	Variansi
$\begin{cases} \frac{\lambda^n \Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)}, & n < \alpha \\ \infty & , n \geq \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, & \alpha > 2 \\ \infty & , 1 < \alpha \leq 2 \\ \text{Tak terdefinisi} & , \alpha \leq 1 \end{cases}$
<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\begin{cases} \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3} \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}, & \alpha > 3 \\ \infty & , 2 < \alpha \leq 3 \\ \text{Tak terdefinisi} & , \alpha \leq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-3)}, & \alpha > 4 \\ \infty & , 3 < \alpha \leq 4 \\ \text{Tak terdefinisi} & , \alpha \leq 3 \end{cases}$

Karena  $E[X^n]$  bernilai  $\infty$  untuk  $n \geq \alpha$ , maka distribusi Lomax selalu merupakan distribusi yang *heavy-tailed* untuk parameter berapapun.

Pada Gambar 2.8 dan 2.9, diberikan contoh grafik pdf dan cdf dari distribusi Lomax dengan beberapa pilihan parameter., dengan parameter dipilih sedemikian sehingga rata-ratanya bernilai 1,000. (kecuali untuk kasus  $\alpha = \frac{1}{2}$ ).



Gambar 2.8: Grafik Pdf Distribusi Lomax



Gambar 2.9: Grafik Cdf Distribusi Lomax

Berdasarkan Gambar 2.8, kenaikan nilai  $\alpha$  menyebabkan pdfnya lebih landai. Secara keseluruhan, perubahan nilai parameter tidak berpengaruh besar terhadap bentuk pdfnya. Jika dilihat dari cdfnya pada Gambar 2.9, ketika  $\alpha = \frac{1}{2}$ , probabilitas terjadinya klaim yang sangat besar bernilai sangat tinggi. Hal ini bersesuaian dengan rata-ratanya yang bernilai tak hingga. Untuk  $\alpha = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ , cdfnya memiliki bentuk yang sangat serupa. Namun, bentuk cdf untuk  $\alpha = \frac{5}{4}$  berbeda karena variansinya bernilai tak hingga. Hal ini menunjukkan bahwa distribusi Lomax dengan  $\lambda = 250$  dan  $\alpha = \frac{5}{4}$  lebih *heavy-tailed* dibanding ketiga pilihan parameter lainnya.

## 2.4 Maximum Likelihood Estimation

*Maximum likelihood estimation* adalah salah satu metode yang umum digunakan untuk menentukan nilai parameter dari suatu distribusi, jika diketahui nilai dari sampel-sampelnya. Untuk menggunakan *maximum likelihood estimation*, distribusinya perlu ditentukan terlebih dahulu, sehingga pemilihan distribusinya belum tentu sesuai dengan sampel.

Misalkan  $X$  adalah variabel acak yang memiliki sebanyak  $m$  parameter, misalkan  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ , dengan pdf  $f(x; \boldsymbol{\theta})$ , dengan  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ , dengan  $\Omega$  adalah ruang parameter, yaitu ruang yang memuat seluruh nilai yang mungkin untuk parameter dari  $X$ . Misalkan  $(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathbf{X}$  adalah sampel yang berdistribusi identik dengan  $X$  dan masing-masing independen. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \boldsymbol{\theta}). \quad (2.58)$$

Ide dari *maximum likelihood estimation* adalah mencari nilai  $\boldsymbol{\theta}$  yang memaksimalkan fungsi *likelihood*  $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$ .

**Definisi 2.1** (*Maximum Likelihood Estimator (MLE)*).  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$  disebut sebagai *maximum likelihood estimator* dari  $\boldsymbol{\theta}$  jika

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} [L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X})].$$

Cara memaksimalkan fungsi *likelihood* adalah dengan menggunakan turunan. Namun, pada umumnya, dengan melakukan turunan pada fungsi *likelihood* secara langsung, cukup sulit untuk mendapatkan bentuk persamaan yang dapat diselesaikan secara eksplisit. Oleh karena itu, didefinisikan fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \ln [L(\boldsymbol{\theta})] = \ln \left[ \prod_{i=1}^n f(x_i; \boldsymbol{\theta}) \right] = \sum_{i=1}^n \ln [f(x_i; \boldsymbol{\theta})]. \quad (2.59)$$

Penggunaan *log-likelihood* tidak mengubah hasil estimasi karena  $g : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  dengan  $g(x) = \ln(x)$  adalah fungsi yang monoton naik untuk  $x > 0$ . Estimasi untuk  $\boldsymbol{\theta}$  diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.60)$$

Metode *maximum likelihood estimation* tidak menjamin bahwa selalu ada solusi yang dapat diperoleh dari sistem persamaan (2.60). Jika terdapat solusi, maka solusinya pasti unik.

(Hogg et al., 2018, pp. 355-357)

## 2.5 Integrated Tail Distribution

Untuk sembarang variabel acak  $X$ , dengan fungsi distribusi  $F(x)$ , yang terdefinisi pada  $(0, \infty)$  dan memiliki ekspektasi yang berhingga bernilai  $\mu_X$ , *integrated tail distribution* dari  $X$  memiliki fungsi distribusi yang didefinisikan sebagai

$$F_{X^e}(x) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^x \bar{F}(y) dy. \quad (2.61)$$

(Klüppelberg, 1988, p. 132)

## 2.6 Compound Distribution

Berikut adalah definisi dari *compound distribution*.

**Definisi 2.2 (Compound Distribution).** Misalkan  $N$  berupa variabel acak yang berupa distribusi *count* (yaitu  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  berupa barisan variabel acak yang *identical and independently distributed* (iid). Penjumlahan variabel acak  $S$  yang didefinisikan sebagai

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N = \sum_{k=1}^N X_k \quad (2.62)$$

disebut *compound distribution*.

(Klugman et al., 2008, p. 214)

*Compound distribution* memiliki keterkaitan dengan konvolusi.

**Definisi 2.3 (Konvolusi (Convolution)).** Konvolusi dari dua fungsi  $f$  dan  $g$  didefinisikan sebagai

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy.$$

(Herman, 2022, p. 456)

Fungsi distribusi dari  $S$  dapat dinyatakan dalam konvolusi dari fungsi distribusi dari  $X$ .

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(S \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S \leq x | N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n) F_X^{*n}(x). \end{aligned}$$

$F_X^{*n}$  disebut sebagai konvolusi ke- $n$  dari fungsi distribusi  $F_X$ . Jika  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  berupa barisan variabel acak dengan *support* positif yang iid dengan fungsi distribusi  $F_X(x)$ , maka nilai

dari konvolusi ke- $n$  untuk tiap  $x > 0$  dapat dicari secara rekursif.

$$F_X^{*k}(x) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \int_0^x F_X^{*(k-1)}(x-y) dF_X(y) & , k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.63)$$

(Klugman et al., 2008, p. 214)

## 2.7 Proses *Compound Poisson*

Proses stokastik  $\{X(t) : t \in T\}$  adalah sekumpulan variabel acak, di mana untuk setiap  $t \in T$ ,  $X(t)$  berupa suatu variabel acak. Indeks  $t$  umumnya diinterpretasikan sebagai waktu dan  $X(t)$  diinterpretasikan sebagai keadaan pada waktu  $t$ . Himpunan  $T$  disebut sebagai himpunan indeks dari proses. Jika  $T$  berupa himpunan terhitung, proses stokastiknya disebut sebagai proses waktu diskrit. Di sisi lain, jika  $T$  berupa interval pada bilangan riil, proses stokastiknya disebut sebagai proses waktu kontinu. Himpunan keadaan dari proses stokastik didefinisikan sebagai himpunan yang anggotanya berupa semua nilai yang mungkin untuk  $X(t)$ .

(Ross, 2019, p. 84)

**Definisi 2.4 (Proses Menghitung (*Counting Process*)).** Sebuah proses stokastik  $\{N(t), t \geq 0\}$  disebut sebagai proses menghitung jika  $N(t)$  menyatakan banyaknya kejadian hingga waktu  $t$ . Dari definisi tersebut, sebuah proses menghitung harus memenuhi beberapa kondisi, yaitu

1.  $N(t) \geq 0$ ,
2.  $N(t)$  berupa bilangan bulat,
3. Jika  $s < t$ , maka  $N(s) \leq N(t)$ ,
4. Untuk  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval  $(s, t]$ .

Terdapat dua sifat yang menjadi perhatian pada proses menghitung, yaitu kenaikan bebas dan kenaikan stasioner.

1. Kenaikan bebas (*independent increments*)

Sebuah proses menghitung dikatakan memiliki sifat kenaikan bebas jika banyaknya kejadian yang terjadi antara interval waktu yang tidak berurutan bersifat independen.

2. Kenaikan stasioner (*stationary increments*)

Sebuah proses menghitung dikatakan memiliki sifat kenaikan stasioner (*stationary increments*) jika banyaknya kejadian yang terjadi hanya bergantung pada panjang

interval waktu. Dengan kata lain, banyaknya kejadian pada interval  $(s, s+t)$  memiliki distribusi yang sama untuk setiap  $s \geq 0$ .

(Ross, 2019, pp. 314-315)

Misalkan  $\{N(t), t \geq 0\}$  adalah sebuah proses menghitung dan  $X_n$  adalah waktu antar kejadian ke- $(n-1)$  dan ke- $n$  untuk  $n \geq 1$ .

**Definisi 2.5 (Proses Pembaruan (*Renewal Process*)).** Jika barisan variabel acak positif  $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$  dengan tiap variabel acak independen dan memiliki distribusi yang sama (iid), maka  $\{N(t), t \geq 0\}$  disebut sebagai proses pembaruan.

(Ross, 2019, p. 431)

Ketika proses pembaruan memiliki waktu antar kejadiannya berdistribusi eksponensial yang iid, maka proses pembaruan tersebut disebut sebagai proses Poisson. Sebelum masuk ke definisi proses Poisson, berikut adalah definisi  $o(h)$ .

**Definisi 2.6.** Sebuah fungsi  $f$  dikatakan  $o(h)$  jika

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

(Ross, 2019, p. 317)

Berikut adalah definisi dari proses Poisson.

**Definisi 2.7 (Proses Poisson (*Poisson Process*)).** Sebuah proses menghitung  $\{N(t), t \geq 0\}$  disebut sebagai proses Poisson dengan  $\lambda > 0$  jika aksioma berikut berlaku

1.  $N(0) = 0$ ,
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  memiliki kenaikan bebas,
3.  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ ,
4.  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ .

(Ross, 2019, p. 317)

Sebuah proses stokastik  $\{X(t), t \geq 0\}$  disebut sebagai proses *compound* Poisson jika dapat ditulis dalam bentuk

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0 \quad (2.64)$$

dengan  $\{N(t), t \geq 0\}$  adalah proses Poisson dan  $\{Y_i\}$  berupa barisan variabel acak yang iid, serta independen terhadap  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Variabel acak  $X(t)$  disebut sebagai variabel acak *compound* Poisson.

(Ross, 2019, p. 346)

## 2.8 Inverse Transformation Method

*Inverse transformation method* adalah salah satu metode yang paling umum untuk menghasilkan nilai dari suatu variabel acak kontinu. Berikut adalah metodenya.

**Proposisi 2.2.** Misalkan  $U$  berupa variabel acak yang berdistribusi uniform standar. Untuk sembarang cdf kontinu  $F$ , dapat didefinisikan variabel acak kontinu  $X$  sebagai berikut.

$$X = F^{-1}(U). \quad (2.65)$$

Variabel acak  $X$  memiliki cdf  $F$ .

(Ross, 2019, p. 683)

## 2.9 Metode Regula Falsi

Metode regula falsi adalah metode iteratif yang digunakan untuk mencari akar riil dari suatu fungsi kontinu. Ide dari metode ini adalah membuat fungsi linear yang melewati dua titik dari fungsi yang ingin dicari akarnya (misalkan  $f(x)$ ), dengan kedua titik ini, misalkan  $x_1$  dan  $x_2$ , memiliki tanda yang berbeda. Selanjutnya, interval dari lokasi akarnya diperkecil berdasarkan fungsi linear yang dikonstruksi.

Misalkan  $f(x)$  adalah suatu fungsi kontinu dan  $a_1 < b_1$ , dengan  $f(a_1)$  dan  $f(b_1)$  berbeda tanda, yaitu  $f(a_1)f(b_1) < 0$ . Definisikan garis linear  $g_1(x)$  yang melewati  $(a_1, f(a_1))$  dan  $(b_1, f(b_1))$ .

$$g_1(x) = f(a_1) + \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}(x - a_1).$$

Misalkan  $c_1$  adalah akar dari  $g_1(x)$ , maka

$$c_1 = a_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)}f(a_1) = \frac{a_1f(b_1) - b_1f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}.$$

Jika  $f(a_1)f(c_1) > 0$ , maka  $a_2 = c_1$  dan  $b_2 = b_1$ . Sebaliknya, jika  $f(a_1)f(c_1) < 0$ , maka  $a_2 = a_1$  dan  $b_2 = c_1$ . Prosedur ini dilakukan terus menerus hingga  $|a_n - b_n|$  bernilai lebih kecil dari toleransi yang ditentukan.

(Feldman et al., 2024, p. 429)

## 2.10 Ruang Metrik

Sebuah himpunan  $\mathcal{X}$ , dengan elemen yang disebut titik, disebut sebagai ruang metrik ketika sembarang dua titik  $x, y \in \mathcal{X}$  dapat diasosiasikan ke bilangan riil, yaitu  $d(x, y)$  yang disebut sebagai jarak antara  $x$  dan  $y$ , sedemikian sehingga berlaku

1.  $d(x, y) > 0$  untuk  $x \neq y$  dan  $d(x, x) = 0$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall z \in \mathcal{X}$ .

(Rudin, 1964, p. 30)

Salah satu contoh jarak yang paling umum digunakan adalah jarak Euclidean. Pada  $\mathbb{R}^n$ , jarak Euclidean antara dua titik  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  didefinisikan sebagai

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (2.66)$$

(Rudin, 1964, p. 31)

Metrik uniform adalah sebuah metrik yang terdefinisi pada suatu ruang metrik dan dihitung sebagai jarak maksimum antara dua titik pada ruang metrik tersebut. Metrik uniform dikenal juga dengan sebutan metrik  $L_\infty$ . Metrik uniform berupa kasus khusus dari jarak Minkowski. Untuk suatu ruang metrik  $(\mathcal{X}, \rho)$ , misalkan  $\mathcal{X}$  berdimensi  $n$  dan  $x, y \in \mathcal{X}$ , dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , maka jarak Minkowskinya adalah

$$\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

Ketika  $p \rightarrow \infty$ , maka jaraknya menjadi metrik uniform.

$$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i|.$$

(Yang et al., 2021, p. 3)

Misalkan  $\mathfrak{G}$  adalah suatu himpunan fungsi dengan domain  $X$  dan pemetaan ke suatu ruang metrik  $(Y, d)$ , dengan  $Y$  adalah himpunan terbatas dan  $d$  berupa jarak Euclidean. Untuk  $f, g \in \mathfrak{G}$ , metrik uniform yang terdefinisi pada  $\mathfrak{G}$  didefinisikan sebagai

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty. \quad (2.67)$$

(Martínez Sánchez &amp; Baltazar-Larios, 2022, p. 5)

Terdapat beberapa teori yang diperlukan mengenai ruang metrik, yaitu barisan konvergen, barisan Cauchy, ruang metrik komplit, dan fungsi kontinu.

**Definisi 2.8 (Barisan Konvergen (*Convergent Sequence*)).** Sebuah barisan  $(x_n)$  pada ruang metrik  $\mathcal{X}$  disebut konvergen jika terdapat  $x \in \mathcal{X}$  dengan sifat berikut: untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga  $n \geq N$  mengakibatkan  $d(x_n, x) < \varepsilon$ .

(Rudin, 1964, p. 47)

**Definisi 2.9 (Barisan Cauchy (*Cauchy Sequence*)).** Sebuah barisan  $(x_n)$  pada ruang metrik  $\mathcal{X}$  disebut sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  jika  $n, m \geq N$ .

(Rudin, 1964, p. 52)

**Definisi 2.10 (Ruang Metrik Komplit (*Complete Metric Space*)).** Sebuah ruang metrik  $\mathcal{X}$  dengan setiap barisan Cauchy pada  $\mathcal{X}$  konvergen ke titik pada  $\mathcal{X}$  juga disebut sebagai ruang metrik komplit.

(Rudin, 1964, p. 54)

Suatu ruang metrik dapat dipetakan ke ruang metrik lain dengan fungsi. Berikut adalah definisi dari fungsi kontinu.

**Definisi 2.11 (Fungsi Kontinu (*Continuous Function*)).** Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah ruang metrik dengan  $E \subset X$ ,  $p \in E$ , dan  $f : X \rightarrow Y$ .  $f(x)$  disebut sebagai fungsi kontinu di  $p$  jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$  untuk semua  $x \in E$  dengan  $d_X(x, p) < \delta$ . Jika  $f$  kontinu di semua titik pada  $E$ , maka  $f$  disebut kontinu pada  $E$ .

(Rudin, 1964, p. 85)

## 2.11 Barisan Fungsi

Berikut adalah definisi dari barisan fungsi.

**Definisi 2.12 (Barisan Fungsi (*Sequence of Functions*)).** Misalkan  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  dan untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ , terdapat fungsi  $f_n : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$  disebut sebagai barisan fungsi.

Sebuah barisan fungsi dapat konvergen ke fungsi tertentu pada  $\mathbb{R}$ .

**Definisi 2.13 (Konvergensi *Pointwise* (*Pointwise Convergence*)).** Misalkan  $(f_n)$  adalah barisan fungsi yang terdefinisi pada  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ .  $(f_n(x))$  dikatakan konvergen secara *pointwise* atau titik demi titik pada  $\mathcal{X}$  ke fungsi  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  jika untuk tiap  $x \in \mathcal{X}$ ,  $(f_n(x))$  konvergen ke  $f(x)$ , yakni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

$f$  disebut sebagai limit, limit *pointwise*, atau limit barisan fungsi.

Definisi tersebut dapat juga ditulis dalam notasi matematis.

**Definisi 2.14.** Misalkan  $(f_n)$  adalah barisan fungsi pada  $\mathcal{X}$ .  $(f_n)$  konvergen *pointwise* ke  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  jika dan hanya jika  $(\forall x \in \mathcal{X} \wedge \forall \varepsilon > 0) \exists K(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq K(\varepsilon, x)$ , berlaku  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

(Aguilar, 2022, pp. 229-232)

## 2.12 *Ruin Theory*

*Ruin* adalah suatu ukuran risiko bagi perusahaan asuransi. Pada bagian ini, dibahas mengenai istilah-istilah yang berkaitan dengan *ruin*.

### 2.12.1 Model Cramér-Lundberg

Misalkan sebuah perusahaan asuransi dimulai dengan *capital* awal, yang disebut surplus awal dan dinotasikan dengan  $u$ . Selain itu, perusahaan asuransi juga menerima pembayaran premi dan membayar klaim kerugian. Pembayaran premi diasumsikan datang dengan tingkat konstan. Pada tugas akhir ini, diasumsikan premi diterima secara kontinu dengan laju  $c$ .

Ketika ada klaim, kerugian dibayarkan kepada pemegang polis. Berbeda dengan pembayaran premi yang konstan, klaim bersifat acak dan tidak pasti, baik dalam hal waktu antarklaim maupun severitasnya. Oleh karena itu, waktu antarklaim dan severitas klaim dapat dinyatakan sebagai variabel acak. Waktu antarklaim diasumsikan berdistribusi eksponensial dengan laju  $\lambda$ , sehingga frekuensi klaim yang terjadi hingga waktu  $t$  mengikuti proses Poisson  $N(t)$  dengan laju  $\lambda$ .  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  berupa variabel acak positif iid yang menyatakan distribusi severitas klaim dengan rata-rata  $\mu$ .

Model yang menyatakan surplus pada waktu  $t$  disebut sebagai model Cramér-Lundberg atau proses risiko Poisson  $\{R_t\}_{t \geq 0}$ , yaitu

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

dengan  $c$  ditentukan berdasarkan ekspektasi banyak klaim yang terjadi hingga waktu  $t$ , ekspektasi besar severitas klaim  $\mu$ , dan faktor loading  $\theta$ , dengan  $\theta > 0$ .  $c$  dipilih sebagai  $c = (1 + \theta)\mu\lambda$ , dengan tujuan agar ekspektasi kedatangan premi melebihi ekspektasi klaim yang datang.

Pendefinisian model juga dapat dipandang dari surplus klaim  $S_t$ , yaitu agregat klaim  $(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i)$  dikurangi premi yang diperoleh  $(ct)$ . Dengan kata lain, surplus klaim  $S_t$  adalah defisit atau profit yang dialami perusahaan dari awal beroperasi hingga waktu  $t$ .

Secara matematis, proses surplus klaim  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  didefinisikan sebagai

$$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct.$$

Surplus klaim dapat juga dipandang sebagai *capital* awal  $u$  dikurangi surplus  $R_t$ .

$$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct = u - \left( u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \right) = u - R_t.$$

(Tse, 2009, pp. 161-175)

### 2.12.2 Waktu *Ruin*

Sebuah perusahaan dikatakan *ruin* jika model surplus  $R_t$  turun hingga atau di bawah nol suatu saat di masa yang akan datang. Waktu hingga terjadi *ruin* didefinisikan sebagai

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S_t > u\}.$$

Ketika tidak ada  $t$  yang memenuhi, yang berarti  $\inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf\{\emptyset\}$ , maka dikatakan  $\tau(u) = \infty$ .

(Burnecki et al., 2005, p. 2)

### 2.12.3 *Ruin Probability*

Definisikan  $\psi(u, T)$  sebagai probabilitas terjadi *ruin* dengan *capital* awal  $u$  dengan batas waktu  $T$ .  $\psi(u, T)$  adalah *ruin probability* waktu hingga ketika  $T < \infty$ . *Ruin probability*  $\psi(u, T)$  memiliki hubungan dengan  $\tau(u)$  sebagai berikut

$$\psi(u, T) = \Pr(\tau(u) \leq T).$$

Ketika hal yang menjadi fokus hanyalah terjadinya *ruin* atau tidak, maka  $T \rightarrow \infty$ . Pemilihan  $T$  tersebut menunjukkan bahwa waktu terjadinya *ruin* tidak diperhatikan. Probabilitas yang didefinisikan dengan  $T \rightarrow \infty$  disebut sebagai *ultimate ruin probability*.

$$\psi(u) = \psi(u, \infty) = \Pr(\tau(u) < \infty).$$

(Burnecki et al., 2005, p. 2)

### 2.12.4 Formula Pollaczek-Khinchine

Formula Pollaczek-Khinchine adalah formula yang lazim digunakan pada teori antrian. Selain pada teori antrian, formula Pollaczek-Khinchine juga memiliki aplikasi pada *ruin theory*, yaitu dalam formulasi *ultimate ruin probability* (Rolski et al., 2009). Dalam mengonstruksi *ultimate ruin probability* yang memiliki bentuk menyerupai formula Pollaczek-Khinchine, diperlukan pendefinisian suatu fungsi yang lebih umum, yaitu *ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dan besar defisit kurang dari atau sama dengan  $y$  saat terjadi *ruin*. Besar defisit dinyatakan sebagai variabel acak  $Y$ . Probabilitas ini ditulis sebagai  $G(u, y)$ .

$$G(u, y) = \Pr(\tau(u) < \infty, Y \leq y). \quad (2.68)$$

Probabilitas terjadinya *ruin* independen dengan besar defisit saat terjadi *ruin*. Misalkan probabilitas besar defisit kurang dari  $y$  adalah  $\Pr(Y \leq y) = H(y)$ . Oleh karena itu, persamaan (2.68) dapat juga ditulis sebagai

$$G(u, y) = \Pr(\tau(u) < \infty) \Pr(Y \leq y) = \psi(u)H(y).$$

Besar defisit pasti berhingga, maka dengan  $y \rightarrow \infty$ , berlaku  $\lim_{y \rightarrow \infty} H(y) = 1$ . Akibatnya,  $G(u, y)$  dan  $\psi(u)$  memiliki hubungan

$$\lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y) = \psi(u).$$

**Lema 2.3.**  $G(u, y)$  dapat dinyatakan sebagai persamaan *integro-differential*, yaitu persamaan yang melibatkan turunan dan integral dari suatu fungsi.

$$\frac{\partial}{\partial u} G(u, y) = \frac{\lambda}{c} \left( G(u, y) - \int_0^u G(u-x, y) dF(x) - [F(u+y) - F(u)] \right). \quad (2.69)$$

**Bukti.** Karena banyaknya klaim berupa proses Poisson, maka waktu dari klaim pertama berdistribusi eksponensial dengan pdf  $\lambda e^{-\lambda t}$  dan surplus yang tersedia untuk membayar klaim pertama pada waktu  $t$  adalah  $u + ct$ . Bagi kasus berdasarkan besar klaim pertama.

- $0 < x \leq u + ct$

Jika besar klaim adalah  $x$ , dengan  $0 \leq x \leq u + ct$ , maka klaim pertama tidak menyebabkan kebangkrutan tetapi, mengurangi surplus menjadi  $u + ct - x$ . Berdasarkan sifat stasioner dan kenaikan independen, kebangkrutan dengan defisit maksimal  $y$  terjadi dengan probabilitas  $G(u + ct - x, y)$ .

$$\int_0^{u+ct} G(u + ct - x, y) dF(x).$$

Waktu dari klaim pertama berdistribusi eksponensial dengan pdf  $\lambda e^{-\lambda t}$ , maka proba-

bilitas terjadi *ruin* untuk kasus besar klaim pertama kurang dari atau sama dengan  $u + ct$  adalah

$$\int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} G(u+ct-x, y) dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

- $u + ct < x \leq u + ct + y$

Nilai maksimal besar klaim adalah  $u + ct + y$  karena jika  $x > u + ct + y$ , maka defisit melebihi  $y$ . Jika besar klaim adalah  $x$ , di mana  $u + ct < x \leq u + ct + y$ , maka klaim pertama menyebabkan *ruin*. Probabilitas bahwa severitas klaim  $x$  memenuhi  $u + ct < x \leq u + ct + y$  adalah  $F(u + ct + y) - F(u + ct)$ .  $t$  berdistribusi eksponensial dengan pdf  $\lambda e^{-\lambda t}$ , maka probabilitas terjadi *ruin* untuk kasus besar klaim pertama  $x$  bernilai  $u + ct < x \leq u + ct + y$  adalah

$$\int_0^\infty [F(u + ct + y) - F(u + ct)] \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Akibatnya, berdasarkan hukum probabilitas total, diperoleh

$$G(u, y) = \int_0^\infty \left[ \int_0^{u+ct} G(u+ct-x, y) dF(x) + F(u+ct+y) - F(u+ct) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Substitusi variabel  $z = u + ct$ , sehingga  $t = \frac{z-u}{c}$  dan  $dt = \frac{dz}{c}$ , lalu diperoleh

$$G(u, y) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[ \int_0^z G(z-x, y) dF(x) + F(z+y) - F(z) \right] dz.$$

Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus dan turunan rantai, dapat diturunkan fungsi  $G(u, y)$  terhadap  $u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} G(u, y) &= \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[ \int_0^z G(z-x, y) dF(x) + F(z+y) - F(z) \right] dz \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u G(u-x, y) dF(x) + F(u+y) - F(u) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( G(u, y) - \int_0^u G(u-x, y) dF(x) - [F(u+y) - F(u)] \right). \end{aligned}$$

□

Dengan mengintegrasikan persamaan (2.69) terhadap  $u$  dari 0 sampai  $\infty$ , dapat diperoleh formula untuk  $G(0, y)$ .

**Lema 2.4.** Formula untuk *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u = 0$  dan defisit maksimal  $y$  adalah

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(x)] dx. \quad (2.70)$$

**Bukti.** Integrasikan persamaan (2.69) terhadap  $u$  dengan batas 0 dan  $\infty$ . Pada sisi kiri,

diperoleh

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} G(u, y) du = \lim_{u \rightarrow \infty} G(u, y) - G(0, y).$$

Ketika *capital* awal  $u$  bernilai sangat besar, yakni  $u \rightarrow \infty$ , maka  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , sehingga  $\lim_{u \rightarrow \infty} G(u, y) = 0$ .

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} G(u, y) du = -G(0, y).$$

Pada sisi kanan persamaan (2.69), berlaku

$$\frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty G(u, y) du - \int_0^\infty \int_0^u G(u-x, y) dF(x) du - \int_0^\infty [F(u+y) - F(u)] du \right).$$

Ubah batas integrasi untuk ekspresi kedua. Dengan  $0 < x < u$  dan  $0 < u < \infty$ , maka batas integrasi yang ekuivalen adalah  $x < u < \infty$  dan  $0 < x < \infty$ .

$$\frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty G(u, y) du - \int_0^\infty \int_x^\infty G(u-x, y) du dF(x) - \int_0^\infty [F(u+y) - F(u)] du \right).$$

Lakukan substitusi  $v = u - x$  dan  $dv = du$  pada ekspresi kedua. Batas bawah untuk  $v$  adalah ketika  $u = x$ , sehingga  $v = 0$ , sedangkan batas atas tidak berubah.

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty G(u, y) du - \int_0^\infty \int_0^\infty G(v, y) dv dF(x) - \int_0^\infty [F(u+y) - F(u)] du \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty G(u, y) du - \int_0^\infty G(v, y) dv \int_0^\infty dF(x) - \int_0^\infty [F(u+y) - F(u)] du \right). \end{aligned}$$

Karena  $\int_0^\infty dF(x) = 1$ , maka hanya tersisa ekspresi ketiga. Jadi, persamaan (2.69) disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} G(0, y) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [F(x+y) - F(x)] du \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty [-1 + F(u+y) + 1 - F(u)] du \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty [1 - F(u)] du - \int_0^\infty [1 - F(u+y)] du \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty [1 - F(u)] du - \int_y^\infty [1 - F(u)] du \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(u)] du. \end{aligned}$$

□

Lebih lanjut, dapat diperoleh juga bentuk untuk  $G(u, y)$  dengan  $u > 0$ .

**Lema 2.5.** Formula untuk *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u > 0$  dan defisit

maksimal  $y$  adalah

$$G(u, y) = G(0, y) + \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(u-x, y) S(x) dx - \int_0^u [F(x+y) - F(x)] dx \right). \quad (2.71)$$

**Bukti.** Integralkan persamaan (2.69) terhadap  $w$  dengan batas 0 dan  $u$ . Pada sisi kiri, diperoleh

$$\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} G(w, y) dw = G(u, y) - G(0, y).$$

Pada sisi kanan persamaan (2.69), berlaku

$$\frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(w, y) dw - \int_0^u \int_0^x G(w-x, y) dF(x) dw - \int_0^u [F(w+y) - F(w)] dw \right). \quad (2.72)$$

Perhatikan ekspresi kedua terlebih dahulu. Ubah batas integrasi dengan  $0 < x < w$  dan  $0 < w < u$ , maka batas integrasi yang ekuivalen adalah  $x < w < u$  dan  $0 < x < u$ .

$$\int_0^u \int_x^u G(w-x, y) dw dF(x).$$

Lakukan substitusi  $v = w - x$  dan  $dv = dw$ . Batas bawah untuk  $v$  adalah ketika  $w = x$ , sehingga  $v = 0$ , sedangkan batas atas menjadi  $v = u - x$ .

$$\int_0^u \int_x^{u-x} G(v, y) dv dF(x).$$

Lakukan perubahan batas integrasi kembali menjadi  $0 < x < u - v$  dan  $0 < v < u$ .

$$\int_0^u \int_0^{u-v} G(v, y) dF(x) dv = \int_0^u G(v, y) F(u-v) dv.$$

Dengan substitusi hasil di atas ke (2.72), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(w, y) dw - \int_0^u G(w, y) F(u-w) dw - \int_0^u [F(w+y) - F(w)] dw \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(w, y) [1 - F(u-w)] dw - \int_0^u [F(w+y) - F(w)] dw \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(u-w, y) S(w) dw - \int_0^u [F(w+y) - F(w)] dw \right). \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

$$G(u, y) = G(0, y) + \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(u-w, y) S(w) dw - \int_0^u [F(w+y) - F(w)] dw \right).$$

□

Namun, persamaan (2.71) tidak terlalu berguna untuk perhitungan *ruin probability*

karena melibatkan integral dari fungsi yang berupa *ruin probability* juga. Persamaan ini dibahas lebih lanjut pada persamaan integral Volterra.

Dengan limit  $y \rightarrow \infty$  pada persamaan (2.70), didapat *ultimate ruin probability* ketika *capital* awal  $u$  sebesar 0 untuk distribusi severitas klaim apapun.

$$\psi(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (2.73)$$

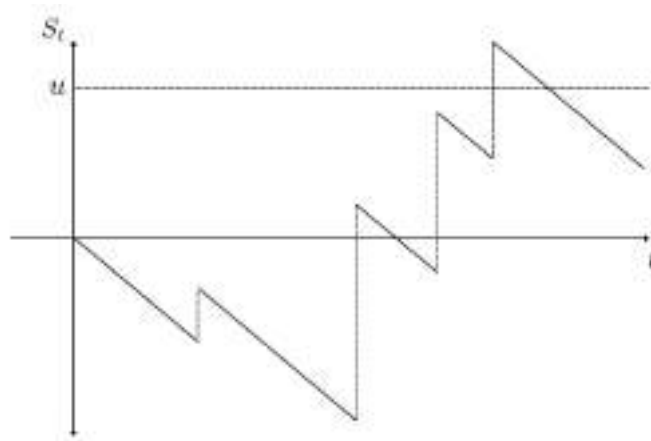
Fungsi distribusi untuk besar defisit saat terjadi *ruin* dengan *capital* awal 0 dapat dicari dengan menggunakan persamaan (2.70) dan (2.73). Probabilitas defisit kurang dari atau sama dengan  $y$  ekuivalen dengan *ruin probability* ketika *capital* awal 0 dengan defisit kurang dari atau sama dengan  $y$  dengan syarat *ruin* terjadi, yaitu

$$H(y) = \Pr(Y \leq y) = \frac{G(0, y)}{\psi(0)} = \frac{1}{\mu} \int_0^y [1 - F(x)] dx, \quad (2.74)$$

dengan  $Y$  berupa *integrated tail distribution* dari distribusi severitas klaim. Dengan mencari turunan pertamanya terhadap  $y$ , didapat pdf dari  $Y$ .

$$h(y) = \frac{1 - F(y)}{\mu}. \quad (2.75)$$

Definisikan fungsi  $L_t = \sup_{0 \leq x \leq t} \{S_x\}$  dan  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t = \sup_{0 \leq x < \infty} \{S_x\}$ . Berdasarkan definisi dari  $S_t$ ,  $S_t$  memiliki titik diskontinu pada waktu terjadinya klaim. Pada titik di mana  $S_t$  kontinu,  $S_t$  turun.



Gambar 2.10: Ilustrasi fungsi  $S_t$

$L_t$  berupa fungsi yang menyatakan supremum dari  $S_x$  hingga waktu  $t$ . Selanjutnya, dibuktikan lema berikut.

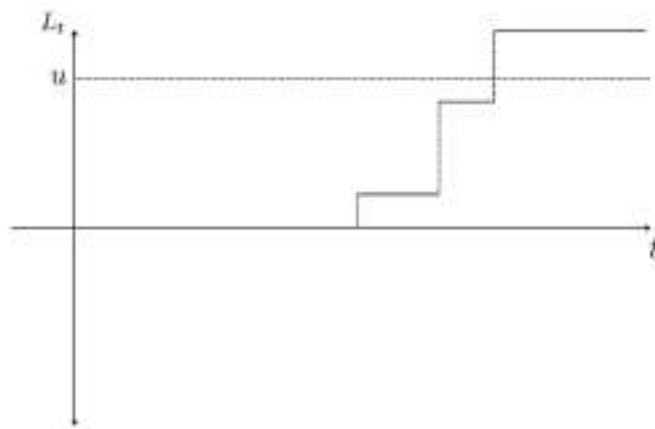
**Lema 2.6.**  $L_t$  berupa fungsi tak turun.

**Bukti.** Untuk sembarang  $0 < t_1 < t_2$ :

$$\begin{aligned} L_{t_1} &= \sup_{0 \leq x \leq t_1} \{S_x\} \\ &\leq \sup \left\{ \sup_{0 \leq x \leq t_1} \{S_x\}, \sup_{t_1 < x \leq t_2} \{S_x\} \right\} \\ &= \sup_{0 \leq x \leq t_2} \{S_x\} \\ &= L_{t_2} \end{aligned}$$

$L_{t_1} \leq L_{t_2}$  untuk sembarang  $t_1 < t_2$ , maka  $L_t$  berupa fungsi tak turun.  $\square$

Berikut adalah ilustrasi untuk  $L_t$  berdasarkan ilustrasi  $S_t$  sebelumnya.



Gambar 2.11: Ilustrasi fungsi  $L_t$

$L_t$  adalah fungsi tak turun yang memiliki bentuk menyerupai fungsi *ladder*. Definisikan variabel acak  ${}_kL$  yang menyatakan ketinggian *ladder* ke- $k$ .  $N_t$  berupa proses Poisson yang memiliki sifat kenaikan stasioner dan independen, sehingga  $S_t$  memiliki sifat yang sama. Akibatnya,  ${}_kL$  memiliki distribusi yang identik dengan  $Y$  pada persamaan (2.75) untuk semua  $k \in \mathbb{N}$ . Misalkan  $X$  adalah variabel acak yang menyatakan distribusi severitas klaim,  $F_X$  berupa cdfnya, dan  $\mu_X$  berupa ekspektasi dari  $X$ . Pdf dari  ${}_kL$  adalah

$$f_k({}_kL) = \frac{1 - F_X({}_kL)}{\mu_X}, k = 1, 2, \dots \quad (2.76)$$

Misalkan  $K$  menyatakan banyak *ladder*, maka  $L$  dapat ditulis sebagai

$$L = \sum_{i=1}^K {}_iL. \quad (2.77)$$

Probabilitas tidak ada *ladder* sama dengan probabilitas tidak terjadi *ruin* ketika  $u = 0$

karena jika ada *ladder* dengan  $u = 0$ , maka jelas bahwa  $L > 0$ . Karena sifat kenaikan independen dan stasioner, probabilitas adanya  $k$  *ladder* sama dengan probabilitas terjadi *ruin* saat  $u = 0$  sebanyak  $k$  kali, lalu dikali probabilitas tidak ada *ladder* setelah *ladder* ke- $k$ .

$$\Pr(K = k) = [1 - \psi(0)][\psi(0)]^k = \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k. \quad (2.78)$$

Berdasarkan pmf (2.78), dapat dilihat bahwa  $K$  berdistribusi geometrik dengan probabilitas sukses  $p = \frac{\theta}{1 + \theta}$ . Karena  $\{{}_kL\}_{k=1}^{\infty}$  berupa barisan distribusi yang iid dan  $K$  berdistribusi geometrik, maka  $L$  merupakan distribusi *compound* geometrik. Ketika  $K = 0$ , yang berarti tidak ada *ladder*, maka  $L$  bernilai 0.  $L$  dinyatakan sebagai sumasi dari variabel acak  $\{{}_kL\}_{k=1}^{\infty}$  yang iid, maka  $L$  dapat juga dipandang sebagai penjumlahan dari  $K$  variabel acak  ${}_kL$ . Notasikan pdf dan cdf untuk  ${}_kL$  sebagai  $f_{X^e}$  dan  $F_{X^e}$ , dan cdf untuk  $L$  sebagai  $F_{X^e}^{*K}$ ,

$$F_{X^e}^{*K}(x) = \Pr(L \leq x) = \Pr\left(\sum_{i=1}^K {}_iL \leq x\right) = \Pr\left(\sum_{i=1}^K X_i^e \leq x\right).$$

Probabilitas terjadi *ruin* ekuivalen dengan  $\Pr(L > u)$ .  $L > u$  terjadi ketika total penjumlahan dari *ladder* bernilai lebih dari  $u$ .

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \Pr(L > u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L > u | K = k) \Pr(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k \Pr(L > u | K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k (1 - F_{X^e}^{*k}(u)) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k F_{X^e}^{*k}(u). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Persamaan (2.79) dikenal sebagai formula Pollaczek-Khinchine untuk *ultimate ruin probability*.

(Klugman et al., 2008, pp. 293-309)

### 2.12.5 Metode Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* via Formula Pollaczek-Khinchine

Metode aproksimasi *ultimate ruin probability* via formula Pollaczek-Khinchine melibatkan sumasi dari sebanyak  $K$  *ladder* dengan masing-masing tinggi *ladder*  ${}_iL$ , yaitu  $L = \sum_{i=1}^K {}_iL$  (2.77). Diketahui bahwa  $K$  berdistribusi geometrik dengan parameter  $p = \frac{\theta}{1 + \theta}$ . Oleh karena itu, sampel nilai  $K$  dapat dihasilkan dengan simulasi Monte Carlo. Hal yang sama berlaku untuk  ${}_iL, i = 1, 2, \dots, K$ . Metode ini biasa disebut sebagai aproksimasi Pollaczek-Khinchine. Berikut adalah prosedur yang digunakan pada aproksimasi ini.

1. Menentukan distribusi severitas klaim yang bersesuaian, misalkan dengan fungsi distribusi  $F_X(u)$  dan *integrated tail distribution*  $F_{X^e}(u)$  dan *capital* awal  $u$ .
2. Menentukan jumlah sampel  $N$ .
3. *Generate* suatu nilai, misalkan  $u_n$ , dari distribusi uniform standar ( $U_n \sim \text{Uniform}(0, 1)$ ). Nilai  $u_n$  digunakan untuk menghasilkan variabel acak  $K_n, n = 1, 2, \dots, N$  dengan ketentuan berikut.

$$K_n = \begin{cases} 0, & x < \frac{\theta}{1+\theta}, \\ k, & 1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \leq x < 1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{k+1}. \end{cases}$$

Jika  $K_n = 0$ , maka diasumsikan total nilai klaim adalah 0.

4. *Generate* sebanyak  $K_n$  nilai, misalkan  $u_{n,j}, j = 1, 2, \dots, K_n$ , dari distribusi uniform standar ( $U_{n,j} \sim \text{Uniform}(0, 1)$ ).
5. Melakukan transformasi untuk tiap nilai  $u_{n,j}$  menggunakan fungsi inversi dari cdf *integrated tail distribution* severitas klaim:

$$x_{n,j} = F_{X^e}^{-1}(u_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, K_n$$

6. Untuk mengestimasi  $\Pr(L > u)$  dengan metode Monte Carlo (2.84), dilakukan langkah-langkah berikut:

- Mendefinisikan fungsi indikator

$$H_n = \mathbf{1}_{\sum_{m=1}^{K_n} x_{n,m} > u}$$

. Fungsi ini mengecek sumasi dari klaim pada sampel ke- $n$ .

- Mendefinisikan  $H = \sum_{n=1}^N H_n$ . Fungsi  $H$  menunjukkan berapa banyak sampel yang bernilai lebih dari dengan  $u$  dari seluruh  $N$  titik.

7. *Ultimate ruin probability*  $\psi(u) = \Pr(L > u)$  diaproksimasi dengan  $\frac{H}{N}$ .

(Burnecki et al., 2003, pp. 3-4)

### 2.13 Persamaan Integral Volterra

Terdapat dua jenis integral Volterra, yaitu jenis satu dan jenis dua. Persamaan integral Volterra yang digunakan dalam mencari *ultimate ruin probability* adalah jenis dua,

yang memiliki bentuk umum

$$\psi(u) = g(u) + \int_a^u k(u, s)\psi(s) ds, u \in [a, \infty)$$

dengan  $g(u)$  adalah suatu fungsi kontinu dan  $k(u, t)$  adalah fungsi kernel yang kontinu dan terbatas. Batas terbawah yang mungkin untuk *capital* sebelum terjadi *ruin* adalah 0. Oleh karena itu, nilai  $a$  yang digunakan adalah 0. Berdasarkan Gerber (1979), fungsi  $g(u)$  dan  $k(u, t)$  yang memenuhi adalah

$$g(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu} \int_u^\infty S(x) dx = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty S(x) dx,$$

$$k(u, t) = \frac{1}{(1+\theta)\mu} S(u-t) = \frac{\lambda}{c} S(u-t).$$

Jadi, persamaan integral Volterra yang merepresentasikan *ultimate ruin probability* adalah

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{(1+\theta)\mu} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

(Martire, 2022, pp. 1-4)

Persamaan (2.80) dapat juga dipandang sebagai persamaan (2.71) ketika  $y \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ G(0, y) + \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u G(u-x, y)S(x) dx - \int_0^u [F(x+y) - F(x)] dx \right) \right] \\ &= \psi(0) + \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx - \int_0^u [1 - F(x)] dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx + \mu - \int_0^u S(x) dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx + \int_u^\infty S(x) dx \right). \end{aligned}$$

Persamaan (2.80) dapat diselesaikan dengan mencari transformasi Laplace dari  $\psi(u)$ , lalu mencari inversi dari transformasinya.

**Lema 2.7.** Untuk sembarang distribusi severitas klaim  $X$  dengan pdf  $f(x)$ , berlaku

$$\mathcal{L}\{\psi\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda E[X]}{cs - \lambda[1 - \mathcal{L}\{f\}(s)]}. \quad (2.81)$$

**Bukti.**

$$\mathcal{L}\{\psi\}(s) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty e^{-su} \int_u^\infty S(x) dx du + \int_0^\infty e^{-su} \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx du \right).$$

Dengan menukar batas integrasi, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\psi\}(s) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty S(x) \int_0^x e^{-su} du dx + \int_0^\infty e^{-sx} S(x) \int_x^\infty e^{-s(u-x)} \psi(u-x) du dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty \frac{S(x)}{s} (1 - e^{-sx}) dx + \int_0^\infty e^{-sx} S(x) \int_x^\infty e^{-s(u-x)} \psi(u-x) du dx \right).\end{aligned}$$

$\int_x^\infty e^{-s(u-x)} \psi(u-x) du = \int_0^\infty e^{-su} \psi(u) du = \mathcal{L}\{\psi\}(s)$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\psi\}(s) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty \frac{S(x)}{s} (1 - e^{-sx}) dx + \int_0^\infty e^{-sx} S(x) \mathcal{L}\{\psi\}(s) dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \frac{1}{s} \int_0^\infty S(x) (1 - e^{-sx}) dx + \mathcal{L}\{\psi\}(s) \int_0^\infty e^{-sx} S(x) dx \right) \quad (2.82) \\ &= \frac{\lambda}{cs} \left( \int_0^\infty S(x) dx - \int_0^\infty e^{-sx} S(x) dx \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-sx} S(x) dx \right)^{-1}.\end{aligned}$$

$\int_0^\infty e^{-sx} S(x) dx$  berupa transformasi Laplace dari  $S(x) = 1 - F(x)$ .

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx} S(x) dx &= \int_0^\infty e^{-sx} dx - \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx \\ &= \frac{1}{s} - \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx \\ &= \frac{1}{s} + \left[ \frac{1}{s} e^{-sx} F(x) \right]_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (2.83) \\ &= \frac{1}{s} [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)].\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2.83) ke persamaan (2.82).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\psi\}(s) &= \frac{\lambda}{cs} \left( \mathbb{E}[X] - \frac{1}{s} [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)] \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{cs} [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)] \right)^{-1} \\ &= \left( \lambda \mathbb{E}[X] - \frac{\lambda}{s} [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)] \right) (cs - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)])^{-1} \\ &= \frac{\lambda s \mathbb{E}[X] - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)]}{s (cs - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)])} \\ &= \frac{cs - cs + \lambda s \mathbb{E}[X] - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)]}{s (cs - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)])} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda \mathbb{E}[X]}{cs - \lambda [1 - \mathcal{L}\{f\}(s)]}.\end{aligned}$$

□

## 2.14 Teorema Titik Tetap Banach

Teorema titik tetap Banach adalah sebuah teorema yang memiliki peran penting untuk menunjukkan eksistensi dan *uniqueness* pada berbagai cabang analisis. Untuk memahami

teorema ini, diperlukan informasi mengenai titik tetap dan pemetaan kontraktif terlebih dahulu. Berikut adalah definisi dari *fixed-point* atau titik tetap.

**Definisi 2.15 (Titik Tetap (*Fixed-Point*)).** Titik tetap dari sebuah pemetaan  $T : X \rightarrow X$  adalah titik dengan

$$T(x) = x.$$

Berikut adalah definisi dari pemetaan kontraktif.

**Definisi 2.16 (Pemetaan Kontraktif (*Contractive Mapping*)).** Misalkan  $(X, d)$  adalah sebuah ruang metrik. Sebuah pemetaan  $T : X \rightarrow X$  dikatakan kontraktif jika terdapat bilangan riil  $0 < k < 1$  sedemikian sehingga berlaku

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Berikut adalah bunyi dari teorema titik tetap Banach.

**Teorema 2.8 (Teorema Titik Tetap Banach).** Misalkan  $(X, d)$  adalah suatu ruang metrik yang komplit dengan pemetaan kontraktif  $T : X \rightarrow X$ . Dapat dijamin bahwa terdapat titik tetap  $x^* \in X$ , yaitu  $T(x^*) = x^*$ , yang unik.

**Bukti.** Misalkan diambil sembarang elemen pada  $X$ ,  $x_0 \in X$ . Dapat ditulis barisan iteratif dengan

$$\begin{aligned} T(x_0) &= x_1, \\ T(x_1) &= x_2, \\ T(x_2) &= x_3, \\ &\vdots \\ T(x_{n-1}) &= x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dengan sifat iteratif,  $x_n$  dapat ditulis juga dalam  $x_0$ .

$$x_n = T(x_{n-1}) = T(T(x_{n-2})) = T^2(x_{n-2}) = \dots = T^n(x_0).$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa barisan  $(x_n)$  adalah barisan Cauchy. Dengan definisi kontraktif (2.16), berlaku pertidaksamaan berikut untuk sembarang  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &= kd(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq k^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq k^nd(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan  $n > m$  untuk  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dengan sifat ke-3 pada ruang metrik (2.10), berlaku pertidaksamaan berikut.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq k^{n-1}d(x_1, x_0) + k^{n-2}d(x_1, x_0) + \dots + k^m d(x_1, x_0) \\ &= k^m(k^{n-m-1} + k^{n-m-2} + \dots + 1)d(x_1, x_0) \\ &= k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Karena  $0 < k < 1$ , maka  $0 < k^n < 1 \rightarrow 0 < 1 - k^n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Karena  $k^m \rightarrow 0$  ketika  $m \rightarrow \infty$  dan  $d(x_1, x_0)$  konstan, maka  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ . Oleh karena itu, terbukti  $(x_n)$  berupa barisan Cauchy.

Karena  $X$  berupa ruang metrik yang komplit, maka titik konvergensi  $(x_n)$  ada pada  $X$ , misalkan  $x^*$ . Dengan sifat ke-3 pada ruang metrik (2.10) dan definisi kontraktif (2.16), berlaku pertidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned} d(T(x^*), x^*) &\leq d(T(x^*), x_n) + d(x_n, x^*) \\ &= d(T(x^*), T(x_{n-1})) + d(x_n, x^*) \\ &\leq kd(x^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

Karena  $x_n \rightarrow x^*$ , maka  $d(x_n, x^*) \rightarrow 0$  dan  $d(x^*, x_{n-1}) \rightarrow 0$ . Dengan sifat ruang metrik, untuk sembarang  $x, y \in X$ , berlaku  $x = y$  jika dan hanya jika  $d(x, y) = 0$ . Akibatnya, haruslah  $d(T(x^*), x^*) = 0$ , yang berarti  $T(x^*) = x^*$ .

Selanjutnya, dibuktikan bahwa  $x^*$  unik. Asumsikan ada titik tetap lain pada  $X$ , misalkan  $x'$ . Karena  $x'$  berupa titik tetap, berlaku  $T(x') = x'$ . Dengan definisi kontraktif (2.16), berlaku

$$\begin{aligned} d(x^*, x') &= d(T(x^*), T(x')) \leq kd(x^*, x') \\ &\Leftrightarrow (1 - k)d(x^*, x') \leq 0. \end{aligned}$$

Berlaku  $0 < k < 1 \iff 0 < 1 - k < 1$ . Oleh karena itu, haruslah  $d(x^*, x') \leq 0$ . Di sisi lain, dengan sifat metrik, berlaku  $d(x^*, x') \geq 0$ . Akibatnya, haruslah  $d(x^*, x') = 0$ , sehingga  $x^* = x'$ . Terbukti titik tetap pada  $X$  unik.  $\square$

Setiap barisan Cauchy pada  $\mathbb{R}$  berupa barisan yang konvergen. Dengan mendefinisikan sebuah barisan dengan nilai awal  $x_0 \in X$  dan hubungan rekursif  $x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1$ , dengan  $T$  adalah pemetaan kontraktif pada  $X$ , maka berdasarkan teorema titik tetap Banach, barisan  $(x_n)$  konvergen ke titik tetap (misalkan  $x^*$ ) pada  $X$ , yakni  $\lim(x_n) = x^*$ . Selain itu, titik tetap bersifat unik, sehingga dapat dipilih sembarang nilai awal  $x_0$  yang berupa elemen dari  $X$ . Oleh karena itu, untuk mendapatkan titik tetap pada suatu ruang metrik  $X$ , cukup definisikan sebuah barisan dengan hubungan rekursif  $x_n = T(x_{n-1})$ , dengan  $T$  berupa pemetaan kontraktif pada  $X$  dan memilih sembarang nilai awal  $x_0 \in X$ , lalu meninjau limit dari barisan  $(x_n)$ .

(Mannan et al., 2021, pp. 158-164)

## 2.15 Metode Quasi-Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo merupakan metode yang banyak digunakan dalam beberapa disiplin ilmu, termasuk matematika, fisika, kimia, keuangan, biologi, grafik komputer, riset operasi, dan ilmu manajemen. Metode ini menggunakan pengambilan sampel acak untuk mempelajari sifat-sifat sistem dengan komponen yang berperilaku secara acak.

Dalam statistika, simulasi Monte Carlo dapat digunakan untuk menghasilkan sampel dari suatu distribusi dan mengaproksimasi fungsi distribusi dari suatu variabel acak. Beberapa metode untuk menghasilkan sampel dari suatu distribusi antara lain *inverse transformation*, *acceptance-rejection*, komposisi, dan lain-lain. Metode yang digunakan pada tugas akhir ini adalah *inverse transformation*. Kelebihan dari metode ini adalah algoritma yang sederhana dan syarat penggunaannya hanya satu, yaitu eksistensi dari fungsi inversi cdf ( $F^{-1}$ ).

Simulasi Monte Carlo juga dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi distribusi dari suatu variabel acak. Untuk mengaproksimasi  $F_X(x)$ , dengan  $x$  konstan, dibutuhkan  $n$  sampel dari distribusi uniform standar, misalkan  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Dengan menggunakan *inverse transformation*  $x_i = F^{-1}(u_i), i = 1, 2, \dots, n$ , diperoleh sebanyak  $n$  sampel  $X$ , yakni  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Fungsi distribusi  $F_X(x)$  diaproksimasi dengan rumus

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i \leq x}, \quad (2.84)$$

dengan  $\mathbf{1}_{x_i \leq x}$  merupakan fungsi indikator yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{1}_{x_i \leq x} = \begin{cases} 1, & x_i \leq x, \\ 0, & x_i > x. \end{cases}$$

Hal yang menjadi perhatian dari simulasi Monte Carlo adalah kecepatan konvergennya. Monte Carlo standar memiliki kecepatan konvergensi  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ . Oleh karena itu, dikem-

bangkan berbagai teknik untuk meningkatkan kecepatan konvergensi dan mengurangi error. Salah satu metode yang dikembangkan adalah quasi-Monte Carlo. Quasi-Monte Carlo adalah salah satu varian dari simulasi Monte Carlo, dengan sampel yang digunakan bukan berasal dari distribusi uniform standar, melainkan barisan *quasirandom* yang deterministik. Quasi-Monte Carlo memiliki tingkat konvergensi  $\mathcal{O}\left(\frac{(\ln N)^s}{N}\right)$ , dengan  $s$  adalah dimensi dari barisan yang digunakan. Oleh karena itu, pada umumnya, quasi-Monte Carlo memiliki keunggulan dalam kecepatan konvergensi dibandingkan simulasi Monte Carlo standar, kecuali ketika  $s$  sangat besar dan  $N$  tidak cukup besar. Dengan menggunakan metode quasi-Monte Carlo, diperlukan barisan *low-discrepancy* atau *quasirandom*.

(Lemieux, 2009, pp. 1-32, pp. 161-165)

### 2.15.1 Barisan *Low Discrepancy/Quasirandom*

Definisikan  $\mathfrak{R} = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$  dan untuk  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathfrak{R}^s = \underbrace{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \dots \times \mathfrak{R}}_s.$$

*Discrepancy* adalah ukuran deviasi dari keseragaman suatu barisan titik dalam suatu *hypercube*  $\mathfrak{R}^s$ .

**Definisi 2.17 (*Discrepancy*).** *Discrepancy* suatu himpunan  $X_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  yang dibentuk dari  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , dengan  $x_k \in \mathfrak{R}^s$  adalah

$$D_N(X) = \sup_{\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{R}^s} \left| \frac{A(\mathfrak{C}; X_N)}{N} - \lambda_s(\mathfrak{C}) \right|.$$

$A(\mathfrak{C}; X_N)$  menyatakan banyaknya elemen di  $X_N$  yang ada pada daerah  $\mathfrak{C}$ .  $\lambda_s(\mathfrak{C})$  berupa satuan ukuran Lebesgue pada dimensi  $s$  untuk daerah  $\mathfrak{C}$ . Suatu barisan dikatakan memiliki *discrepancy* rendah ketika untuk semua  $N \in \mathbb{N}$ ,  $D_N$  bernilai kecil. Dengan kata lain, titik tersebar secara merata pada  $\mathfrak{R}^s$ .

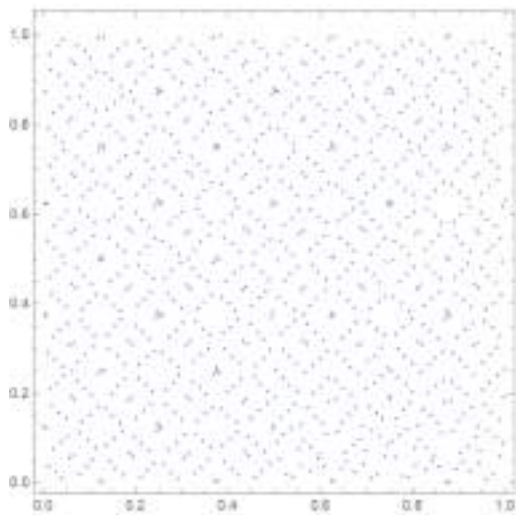
Ide di balik barisan berdiskrepansi rendah adalah untuk setiap daerah  $\mathfrak{C}$ , proporsi titik-titik di dalam  $\mathfrak{C}$  terhadap keseluruhan titik harus sedekat mungkin dengan *hyper-volume* daerah  $\mathfrak{C}$ . Meskipun barisan acak uniform biasa dan barisan *quasirandom* keduanya menghasilkan barisan yang didistribusikan secara seragam pada  $\mathfrak{R}^s$ , mereka memiliki perbedaan yang signifikan. Sebuah mekanisme penghasil titik acak uniform menghasilkan titik sedemikian sehingga setiap percobaan memiliki probabilitas yang sama untuk menghasilkan titik dengan komponen pada subinterval yang sama, misalnya  $(0, \frac{1}{2}]$  dan  $(\frac{1}{2}, 1]$ . Oleh karena itu, pada kasus ekstrem, memungkinkan bahwa nilai dari suatu komponen dalam  $n$  percobaan semuanya berada di setengah interval pertama, sementara titik ke- $(n + 1)$  masih berada di salah satu dari dua interval tersebut dengan probabilitas  $\frac{1}{2}$ .

Hal ini tidak dapat terjadi pada barisan *quasirandom*, di mana titik yang dihasilkan dibatasi oleh persyaratan diskrepansi rendah, sehingga titik berikutnya memiliki nilai-nilai yang disesuaikan berdasarkan posisi titik-titik sebelumnya. Penggunaan barisan *quasi-random* memungkinkan simulasi untuk dihentikan ketika konvergensi teramati, sedangkan pendekatan barisan acak uniform memerlukan kuantitas sampel yang besar.

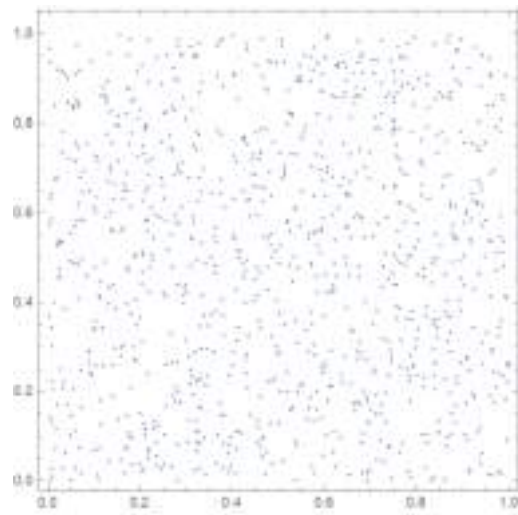
Beberapa barisan dengan *low-discrepancy* yang umum digunakan dalam simulasi quasi-Monte Carlo adalah barisan Halton, barisan Faure, barisan van der Corput, dan barisan Sobol. Barisan yang cenderung memiliki performa terbaik adalah barisan Sobol karena waktu untuk membangun barisannya tercepat dibanding barisan lain dan karakteristik barisannya menyerupai karakteristik dari distribusi uniform standar (Krykova, 2004). Selain itu, batasan dimensi hingga barisan yang dibangun masih baik untuk digunakan tinggi, yaitu setidaknya 260 (Galanti & Jung, 1997).

(Krykova, 2004, pp. 12-13)

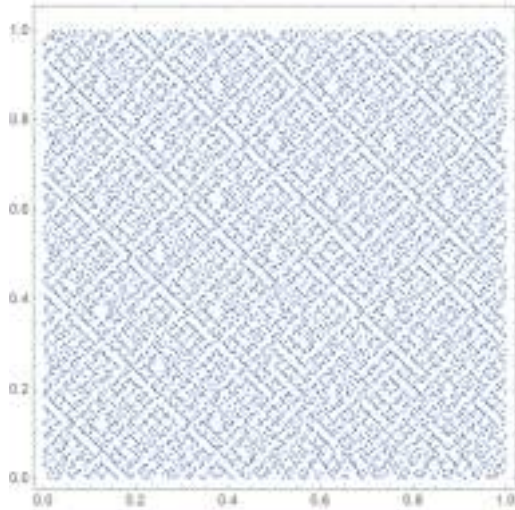
Berikut adalah perbandingan barisan Sobol dimensi 2 dengan titik yang dihasilkan secara seragam pada persegi satuan  $(0, 1)^2$ .



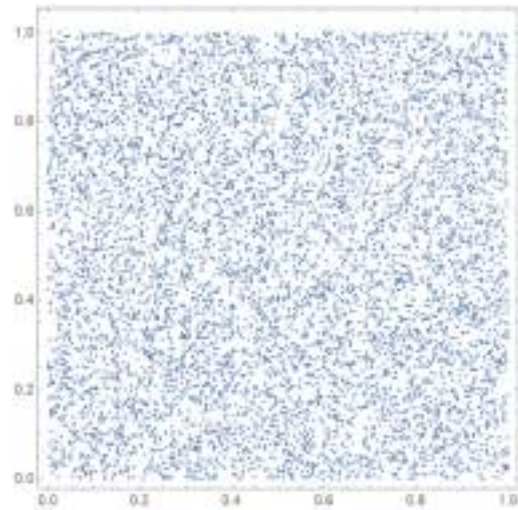
Gambar 2.12: Barisan Sobol dengan 1.024 titik pertama



Gambar 2.13: Titik seragam sebanyak 1.024



Gambar 2.14: Barisan Sobol dengan 8.192 titik pertama



Gambar 2.15: Titik seragam sebanyak 8.192

Berdasarkan Gambar 2.12-2.15, dapat dilihat bahwa barisan Sobol menghasilkan titik-titik yang lebih teratur dibanding titik yang dihasilkan secara seragam. Berdasarkan Gambar 2.13, pada beberapa daerah, terdapat cukup banyak titik yang sangat dekat, seperti pada persekitaran/*neighborhood* dari  $(0.7, 0.9)$ . Di sisi lain, terdapat daerah yang cukup kosong, seperti pada persekitaran  $(0.4, 0.8)$ . Hal serupa juga berlaku pada Gambar 2.15.

Pada Gambar 2.12, dapat dilihat bahwa daerah yang kosong adalah daerah yang menyerupai belah ketupat. Daerah dengan bentuk ini tersebar secara merata pada persegi satuan. Pada Gambar 2.14, terdapat beberapa daerah kosong yang tersebar secara merata juga yang bentuknya menyerupai *strip* diagonal.

## 2.15.2 Barisan Sobol

Barisan Sobol adalah salah satu barisan dengan *discrepancy* rendah yang diajukan oleh seorang matematikawan Rusia, Ilya M. Sobol, pada tahun 1967. Dalam mengonstruksi barisan Sobol, dibutuhkan teori mengenai Galois *field* (*finite field*), polinomial primitif, dan Gray *code*.

### 2.15.2.1 Galois *Field*/*Finite Field*

Sebuah himpunan  $F$  dengan operasi penjumlahan  $+$  dan perkalian  $\cdot$  disebut sebagai *field* ketika untuk semua  $a, b, c$  pada  $F$ , berlaku hal-hal berikut.

1. Komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian:  $a + b = b + a$  dan  $a \cdot b = b \cdot a$ .
2. Asosiatif terhadap penjumlahan dan perkalian:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  dan  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

3. Distributif terhadap perkalian pada penjumlahan:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  dan  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ .
4. Terdapat elemen identitas 0 terhadap penjumlahan, dengan  $a+0 = 0+a = a, \forall a \in F$ ,
5. Terdapat elemen identitas 1 terhadap perkalian, dengan  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in F$ .
6. Eksistensi elemen inversi terhadap penjumlahan, yakni untuk semua  $a \in F$ , terdapat elemen pada  $F$ , dinotasikan dengan  $-a$  yang disebut sebagai elemen inversi penjumlahan, dengan  $a + (-a) = 0$ .
7. Eksistensi elemen inversi terhadap perkalian, yakni untuk semua  $a \in F, a \neq 0$ , terdapat elemen pada  $F$ , dinotasikan dengan  $a^{-1}$  yang disebut sebagai elemen inversi perkalian, dengan  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

Sebuah *field*  $F$  disebut sebagai Galois *field* ketika  $|F| < \infty$ , dengan  $|\cdot|$  menyatakan kardinalitas atau banyak anggota dari  $F$ . Galois *field* dinotasikan dengan  $\mathbb{F}_{p^n}$ ,  $\mathbf{F}_{p^n}$ , atau  $\text{GF}(p^n)$ , dengan  $p^n$  adalah banyak anggota dari Galois *field* tersebut. Banyaknya elemen pada Galois *field* selalu berupa pangkat dari suatu bilangan prima, yakni  $p^n$  dengan  $p \in \mathbb{P}$  dan  $n \in \mathbb{N}$ . Pada bagian selanjutnya, Galois *field* dinotasikan dengan  $\text{GF}(p^n)$ .

(Gallian, 2021, pp. 245-256)

### 2.15.2.2 *Field Theory*

$\text{GF}(p^n)$  memiliki dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian, dengan masing-masing membentuk grup. Grup terhadap penjumlahannya, dinotasikan dengan  $\mathbb{Z}_{p^n}^+$ , adalah  $\{0, 1, 2, \dots, p^n - 1\}$ , sedangkan grup terhadap perkaliannya, dinotasikan dengan  $\mathbb{Z}_{p^n}^\times$ , adalah  $\{1, 2, \dots, p^n - 1\}$ . Setiap grup pastilah tak kosong dan memiliki elemen identitas  $e$ . Setiap elemen pada grup tersebut memiliki orde yang memiliki definisi berikut.

**Definisi 2.18 (Orde (*Order*)).** Orde dari suatu elemen  $a$  pada grup  $G$  adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga  $a^n = e$ . Orde dari  $a$  ditulis sebagai  $|a| = n$ .

(Judson, 2020, p. 46)

Terdapat banyak jenis grup, salah satunya adalah grup siklis. Grup siklis adalah grup yang seluruh elemennya dapat dihasilkan dengan mengoperasikan satu elemen. Secara formal, berikut adalah definisi dari grup siklis.

**Definisi 2.19 (Grup Siklis (*Cyclic Group*) dan Pembangkit (*Generator*)).** Sebuah grup  $G$  dikatakan siklis ketika terdapat  $a \in G$  sedemikian sehingga  $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ . Elemen  $a$  disebut sebagai *generator* dari  $G$ .

(Gallian, 2021, p. 77)

Berikutnya, dibuktikan bahwa seluruh grup multiplikatif dari *finite field*, termasuk  $\mathbb{Z}_{p^n}^\times$ , berupa grup siklis. Untuk membuktikan hal tersebut, diperlukan teorema Lagrange.

**Teorema 2.9 (Teorema Lagrange).** Misalkan  $G$  adalah grup hingga dan  $H$  adalah subgrup dari  $G$ . Banyaknya elemen pada  $H$  harus habis membagi banyaknya elemen pada  $G$ .

(Judson, 2020, p. 74)

Akibat dari teorema Lagrange adalah sebagai berikut.

**Akibat 2.10.** Misalkan  $G$  adalah grup hingga dan  $g \in G$ . Orde dari  $g$  habis membagi banyak elemen pada  $G$ .

(Judson, 2020, p. 74)

Pertama, dibuktikan lema berikut terlebih dahulu.

**Lema 2.11.** Misalkan  $G$  adalah grup komutatif,  $x, y \in G$ , dengan  $|x| = r$  dan  $|y| = s$ . Terdapat elemen pada  $G$  dengan ordenya berupa kelipatan persekutuan terkecil dari  $r$  dan  $s$ , dinotasikan dengan  $\text{lcm}(r, s)$ .

**Bukti.** Bagi atas 2 kasus berdasarkan faktor persekutuan terbesar dari  $r$  dan  $s$ , dinotasikan dengan  $\text{gcd}(r, s)$ .

- $\text{gcd}(r, s) = 1$

Karena  $r$  dan  $s$  relatif prima, maka pasti  $\text{lcm}(r, s) = rs$ . Ambil elemen  $z = xy \in G$ .

$$z^{rs} = x^{rs}y^{rs} = (x^r)^s(y^s)^r = e.$$

Dengan persamaan di atas, berlaku  $|z| \leq rs$ . Selanjutnya, misalkan  $|z| = m$ .

$$e = e^s = z^{ms} = x^{ms}y^{ms} = x^{ms}(y^s)^m = x^{ms}$$

$$e = e^r = z^{mr} = x^{mr}y^{mr} = (x^r)^m y^{mr} = y^{mr}$$

Karena  $|x| = r$ , maka  $r|ms$ . Karena  $r \nmid s$ , maka haruslah  $r|m$ . Dengan argumen serupa, berlaku  $s|m$ .  $\text{gcd}(r, s) = 1$ , maka  $rs|m$ , yang berarti  $rs \leq m = |z|$ .

Berlaku  $|z| \leq rs$  dan  $|z| \geq rs$ , yang berakibat  $|z| = rs$ .

- $\text{gcd}(r, s) \neq 1$

$r$  dan  $s$  dapat ditulis sebagai perkalian dari faktor-faktor primanya. Misalkan  $p_1, p_2, \dots, p_{n_0}$  berupa faktor prima dari  $r$  dan  $s$ . Misalkan juga  $n$  adalah banyaknya faktor prima yang dimiliki oleh  $r$  dan  $m$  adalah banyaknya faktor prima yang dimiliki oleh  $s$ .

$$r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{n_0}^{a_{n_0}} p_{n_0+1}^{a_{n_0+1}} \dots p_n^{a_n}$$

$$s = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_{n_0}^{b_{n_0}} p_{n_0+1}^{b_{n_0+1}} \dots p_m^{b_m}$$

Misalkan  $t = \text{lcm}(r, s)$ , maka  $t$  dapat ditulis sebagai

$$t = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} p_2^{\max\{a_2, b_2\}} \dots p_{n_0}^{\max\{a_{n_0}, b_{n_0}\}} p_{n_0+1}^{a_{n_0+1}} \dots p_n^{a_n} p_{n+1}^{b_{n+1}} \dots p_m^{b_m}.$$

Definisikan  $A = \{i | a_i = \max\{a_i, b_i\}\}$  dan  $B = \{i | b_i = \max\{a_i, b_i\}\}$ . Pemisahan faktor prima dilakukan dengan menggunakan pemisalan berikut.

- $r_1 =$  perkalian dari faktor-faktor prima dari  $r$ , tetapi bukan faktor prima dari  $s$ .

$$r_1 = \prod_{i=n_0+1}^n p_i^{a_i}.$$

- $s_1 =$  perkalian dari faktor-faktor prima dari  $s$ , tetapi bukan faktor prima dari  $r$ .

$$s_1 = \prod_{i=n+1}^m p_i^{b_i}.$$

- $r_2 =$  perkalian dari faktor-faktor prima yang berada pada  $r$  dan  $s$  dengan pangkat yang sama.

$$r_2 = \prod_{i \in (A \cap B)} p_i^{a_i} = \prod_{i \in (A \cap B)} p_i^{b_i}.$$

- $r_3 =$  perkalian dari faktor-faktor prima yang berada pada  $r$  dan  $s$ , tetapi pangkat pada  $r$  lebih tinggi.

$$r_3 = \prod_{i \in A} p_i^{a_i}.$$

- $r_4 =$  perkalian dari faktor-faktor prima yang berada pada  $r$  dan  $s$ , tetapi pangkat pada  $s$  lebih tinggi.

$$r_4 = \prod_{i \in B} p_i^{b_i}.$$

Pilih elemen  $x' = x^{r_4}$  dan  $y' = y^{r_2 r_3}$ . Perhatikan bahwa  $|x^{r_4}| = \frac{r}{r_4} = r_1 r_2 r_3$  dan  $|y^{r_2 r_3}| = \frac{s}{r_2 r_3} = s_1 r_4$ . Selain itu, dapat dilihat bahwa  $\gcd(r_1 r_2 r_3, s_1 r_4) = 1$  karena tidak ada faktor prima yang sama, sehingga berdasarkan kasus pertama, berlaku  $|x^{r_4} y^{r_2 r_3}| = r_1 r_2 r_3 s_1 r_4$ . Di sisi lain, perhatikan bahwa  $\text{lcm}(r, s) = t = r_1 r_2 r_3 s_1 r_4$ . Oleh karena itu, terbukti terdapat elemen pada  $G$ , yaitu  $x^{r_4} y^{r_2 r_3}$  dengan orde  $\text{lcm}(r, s)$ .

□

Dengan Lema 2.11, dibuktikan lema berikut.

**Lema 2.12.** Untuk  $F$  suatu *finite field*,  $F^\times = F \setminus \{0\}$  merupakan grup siklis terhadap perkalian.

**Bukti.** Misalkan  $|F^\times| = m$  dan  $\alpha \in F^\times$  adalah elemen dengan orde tertinggi terhadap operasi perkalian pada  $F^\times$ . Misalkan  $|\alpha| = k$ . Dengan teorema Lagrange,  $k | m$ , sehingga  $k \leq m$ .

Ambil sembarang elemen lain pada  $F^\times$ , misalkan  $\beta$  dengan orde  $r \leq k$ . Dengan Lema

2.11, terdapat elemen lain pada  $F^\times$  dengan orde  $\text{lcm}(k, r)$ . Perhatikan bahwa jika  $r \nmid k$ , maka dengan Lema 2.11, terdapat elemen dengan orde  $\text{lcm}(r, k) = rk > k$ . Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa  $k$  adalah orde terbesar yang dimiliki oleh elemen pada  $F^\times$ . Akibatnya, haruslah  $r|k$  dan  $\text{lcm}(r, k) = k$ . Misalkan  $k = rq$  untuk suatu  $q \in \mathbb{N}$ .

$$\beta^k = \beta^{rq} = (\beta^r)^q = 1 \longrightarrow \beta^k - 1 = 0.$$

Persamaan tersebut berlaku untuk sembarang elemen pada  $F^\times$ . Oleh karena itu, polinomial  $f(x) = x^k - 1 \in F[x]$  memiliki  $m$  akar pada  $F^\times$ . Sembarang polinomial dengan koefisien pada  $F$  dengan derajat  $d$  memiliki maksimal sebanyak  $d$  akar pada  $F$ . Jadi, haruslah  $m \leq k$ . Dengan demikian, diperoleh  $m = k$  dan  $|\alpha| = |F^\times| = m$ , maka  $\alpha$  berupa *generator* pada  $F^\times$  dan  $F^\times$  berupa grup siklis terhadap perkalian.  $\square$

Berikut adalah definisi dari elemen primitif.

**Definisi 2.20 (Elemen Primitif (*Primitive Element*)).** Sebuah elemen pada  $\text{GF}(p^n)$  disebut sebagai elemen primitif jika elemen tersebut berupa *generator* dari  $\text{GF}(p^n)$  terhadap perkalian untuk elemen tak nol.

(Madden, 1981, p. 499)

Agar suatu elemen berupa elemen primitif pada  $\text{GF}(p^n)$ , maka haruslah elemen tersebut relatif prima terhadap  $p^n - 1$ .

**Bukti.** Misalkan  $m$  adalah elemen primitif pada  $\text{GF}(p^n)$ , yang berarti  $\alpha$  berupa *generator* pada grup multiplikatif  $\mathbb{Z}_{p^n}^\times$ . Asumsikan  $m|p^n - 1$ , maka  $p^n - 1 = mq$  untuk suatu  $q \in \mathbb{N}$ . Pada  $\mathbb{Z}_{p^n}^\times$ ,  $\underbrace{m \times m \times m \dots m}_n = 0$ , sehingga  $|m| = q \neq p^n - 1$ .  $\square$

Banyaknya bilangan yang relatif prima terhadap  $p^n - 1$  dapat dihitung dengan Euler's *totient function*.

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Jadi, banyaknya elemen primitif pada  $\text{GF}(p^n)$  adalah  $\phi(p^n - 1)$ .

Berikut adalah definisi dari *algebraic*.

**Definisi 2.21 (*Algebraic*).** Sebuah elemen  $\alpha$  pada *field*  $F$  disebut *algebraic* terhadap  $F$  jika terdapat  $f(x) \in F[x]$  sedemikian sehingga  $f(\alpha) = 0$ . ( $F[x]$  menyatakan himpunan polinomial dengan koefisien pada  $F$ ).

(Judson, 2020, p. 264)

Suatu elemen *algebraic*  $\alpha$  dapat memiliki lebih dari satu polinomial pada  $F[x]$  yang memenuhi  $f(\alpha) = 0$ . Berikut adalah definisi dari polinomial minimal.

**Teorema 2.13 (Polinomial Minimal).** Misalkan  $\alpha$  *algebraic* terhadap  $F$ . Terdapat polinomial monik yang unik dan *irreducible* dengan derajat terkecil  $f(x) \in F[x]$  sedemikian sehingga  $f(\alpha) = 0$ . Jika ada polinomial lain pada  $F[x]$ , misalkan  $g(x)$ , sedemikian sehingga  $g(\alpha) = 0$ , maka  $f(x)|g(x)$ .  $f(x)$  disebut sebagai polinomial minimal.

(Judson, 2020, p. 265)

Sebelum mendefinisikan polinomial primitif, dibutuhkan teori mengenai *extension field* dan *algebraic extension* terlebih dahulu. Berikut adalah definisi dari *extension field*.

**Definisi 2.22 (Extension Field).** Sebuah *field*  $E$  disebut sebagai *extension field* dari  $F$  jika  $F \subseteq E$  dan operasi pada  $F$  sama dengan operasi pada  $E$  yang direstriksi ke  $F$ .

Berikutnya, dibuktikan bahwa  $\text{GF}(p^n)$  berupa *extension field* dari  $\text{GF}(p)$ .

**Bukti.** Berdasarkan definisi Galois *field*, berlaku

$$\begin{aligned}\text{GF}(p) &= \{0, 1, 2, \dots, p-1\}, \\ \text{GF}(p^n) &= \{0, 1, 2, \dots, p^n-1\}.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $\text{GF}(p)$  dan  $\text{GF}(p^n)$  memiliki operasi yang sama, yaitu penjumlahan dan perkalian. Selain itu,  $\text{GF}(p) \subset \text{GF}(p^n)$ . Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.22,  $\text{GF}(p^n)$  berupa *extension field* dari  $\text{GF}(p)$ .  $\square$

**Definisi 2.23 (Algebraic Extension).** Sebuah *extension*  $E$  dari  $F$  disebut sebagai *algebraic extension* ketika setiap elemen pada  $E$  *algebraic* terhadap  $F$ , yang berarti setiap elemen pada  $E$  berupa akar dari polinomial tak nol dengan koefisien pada  $F$ .

**Teorema 2.14.** Jika  $E$  adalah *extension* berhingga dari  $F$ , maka  $E$  adalah *algebraic extension* dari  $F$ .

(Gallian, 2021, p. 360)

Selanjutnya, dibuktikan bahwa semua elemen primitif pada  $\text{GF}(p^n)$  *algebraic* terhadap  $\text{GF}(p)$ .

**Bukti.** Perhatikan bahwa  $|\text{GF}(p^n)| = p^n < \infty$ , sehingga dengan Teorema 2.14,  $\text{GF}(p^n)$  berupa *algebraic extension* dari  $\text{GF}(p)$ . Dengan Definisi 2.23 (*algebraic extension*), setiap elemen pada  $\text{GF}(p^n)$  *algebraic* terhadap  $\text{GF}(p)$ , termasuk elemen-elemen primitif pada  $\text{GF}(p^n)$ .  $\square$

Berikut adalah definisi dari polinomial primitif.

**Definisi 2.24 (Polinomial Primitif (Primitive Polynomial)).** Sebuah polinomial *irreducible*  $f(x) \in \text{GF}(p)[x]$  dengan derajat  $m$  disebut polinomial primitif jika dan hanya jika akarnya adalah elemen primitif yang berada pada  $\text{GF}(p^m)$ .

Dengan kata lain, sebuah polinomial  $f(x)$  dengan derajat  $m$  dan koefisien pada  $\text{GF}(p)$  disebut polinomial primitif jika berupa polinomial minimal dan memiliki akar  $\alpha$  pada  $\text{GF}(p^m)$  sedemikian sehingga  $\text{GF}(p^m)$  dapat dinyatakan sebagai  $\{0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p^m-2}, 1\}$ . Banyaknya polinomial primitif dengan derajat  $m$  pada  $\text{GF}(p)$  adalah  $\frac{\phi(p^m-1)}{m}$ .

(Jungnickel & Vanstone, 1989, p. 337)

### 2.15.2.3 Operasi XOR

Sembarang bilangan asli dapat dinyatakan dalam representasi biner dan dapat dilakukan operasi XOR untuk dua bilangan asli. Misalkan  $i = (i_n i_{n-1} \dots i_2 i_1)_2$  dan  $j = (j_n j_{n-1} \dots j_2 j_1)_2$ . Berikut adalah tabel operasi XOR pada bilangan biner.

Tabel 2.5: Tabel Operasi XOR pada Operasi Bilangan Biner

$i_k$	$j_k$	$i_k \oplus j_k$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Sebagai contoh, representasi biner dari 7 dan 13 berturut-turut adalah  $(111)_2$  dan  $(1101)_2$ . Dengan operasi XOR,

$$7 \oplus 13 = (111)_2 \oplus (1101)_2 = (0111)_2 \oplus (1101)_2 = (1010)_2 = 10.$$

### 2.15.2.4 Gray code

Gray code dari sebuah bilangan asli  $i$  didefinisikan sebagai

$$\text{gray}(i) = i \oplus \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = (\dots i_3 i_2 i_1)_2 \oplus (\dots i_4 i_3 i_2)_2, \quad (2.85)$$

dengan  $i_n$  adalah digit ke- $n$  dari kanan ketika  $i$  ditulis dalam representasi biner, yaitu  $i = (\dots i_3 i_2 i_1)_2$ .

(Joe & Kuo, 2003, p. 50)

### 2.15.2.5 Barisan van der Corput

Barisan van der Corput adalah barisan dengan *discrepancy* rendah pada dimensi 1 yang paling sederhana. Barisan van der Corput menggunakan bilangan bulat positif lebih dari atau sama dengan 2 sebagai basis. Barisan van der Corput memiliki peran penting dalam mengonstruksi barisan Sobol karena komponen pertama (atau nilai pada dimensi

pertama) berupa barisan van der Corput. Misalkan titik-titik pada barisan Sobol adalah  $x_1, x_2, \dots$  dengan  $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,s}), i = 1, 2, \dots$ . Komponen pertama dari tiap titik, yaitu  $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots$  berupa barisan van der Corput dengan basis 2.

Untuk mendapatkan suku ke- $n$  dari barisan van der Corput dengan basis  $b$ , cari representasi dari  $n$  terhadap basis  $b$  terlebih dahulu, misalkan  $n = (n_m n_{m-1} \dots n_2 n_1)_b$ , dengan  $n_m$  adalah bilangan terbesar sedemikian sehingga  $b^{n_m} \leq n$ . Suku ke- $n$  dari barisannya adalah

$$x_n = \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{b^k}.$$

Sebagai contoh, dengan basis 2, suku ke-5 dan ke-19 adalah sebagai berikut.

- $n = 5$

Representasi biner dari 5 adalah  $(101)_2$ , sehingga  $n_1 = 1, n_2 = 0$ , dan  $n_3 = 1$ , maka

$$x_5 = \sum_{k=1}^3 \frac{n_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

- $n = 19$

Representasi biner dari 19 adalah  $(10011)_2$ , sehingga  $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 0$ , dan  $n_5 = 1$ , maka

$$x_{19} = \sum_{k=1}^5 \frac{n_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} = \frac{25}{32}.$$

(Krykova, 2004, pp. 12-13)

### 2.15.2.6 Langkah Konstruksi Barisan Sobol

Misalkan titik-titik pada barisan Sobol adalah  $x_1, x_2, \dots$  dengan  $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,s}), i = 1, 2, \dots$ . Untuk menghasilkan komponen dari titik-titik tersebut (selain komponen pertama), yang difokuskan adalah menghasilkan komponen ke- $j$  dari  $x_i$ , yakni  $x_{i,j}$  untuk  $i = 1, 2, \dots$ . Hal pertama yang dibutuhkan adalah polinomial primitif dengan derajat  $s_j$  pada Galois *field*  $\text{GF}(2)$ .

$$p_j(x) = x^{s_j} + a_{1,j}x^{s_j-1} + a_{2,j}x^{s_j-2} + \dots + a_{s_j-1,j}x + 1. \quad (2.86)$$

Koefisien dari  $p_j(x)$ , yaitu  $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{s_j-1,j}$ , bernilai 0 atau 1. Banyaknya polinomial primitif dengan derajat  $s_j$  pada Galois *field*  $\text{GF}(2)$  adalah  $\frac{\phi(2^{s_j}-1)}{s_j}$ . Pemilihan polinomial primitif bersifat sembarang. Selanjutnya, didefinisikan barisan bilangan asli  $m_{1,j}, m_{2,j}, \dots$

Barisan  $m_{1,j}, m_{2,j}, \dots$  didefinisikan dengan hubungan rekursif

$$m_{k,j} := \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} 2^i a_{i,j} m_{k-i,j} \right) \oplus 2^{s_j} m_{k-s_j,j} \oplus m_{k-s_j,j}, k \geq s_j + 1. \quad (2.87)$$

Nilai awal  $m_{1,j}, m_{2,j}, \dots, m_{s_j,j}$  dapat dipilih secara bebas dengan syarat  $m_{k,j}$  ganjil dan  $m_{k,j} < 2^k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, s_j$ . Didefinisikan *direction numbers* sebagai berikut.

$$v_{k,j} := \frac{m_{k,j}}{2^k}.$$

Tujuan dari pendefinisian tersebut adalah menghilangkan ekspresi  $2^i$  pada persamaan (2.87). Dengan pendefinisian *direction numbers* tersebut, persamaan (2.87) dapat ditulis juga dalam bentuk lain, yaitu

$$v_{k,j} = \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j} \right) \oplus v_{k-s_j,j} \oplus \left( \frac{v_{k-s_j,j}}{2^{s_j}} \right), k \geq s_j + 1. \quad (2.88)$$

Komponen ke- $j$  dari titik ke- $i$  dari barisan Sobol didefinisikan dengan

$$x_{i,j} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} i_n v_{n,j},$$

dengan  $i_n$  adalah digit ke- $n$  dari kanan ketika  $i$  ditulis dalam representasi biner, yaitu  $i = (\dots i_3 i_2 i_1)_2$ .

Terdapat metode perhitungan lebih efisien yang diajukan oleh Antonov & Saleev (1979). Metode yang diajukan melibatkan *Gray code* atau kode biner terefleksi. Dengan *Gray code*, komponen ke- $j$  dari titik ke- $i$  dari barisan Sobol dapat dihitung dengan

$$x_{i,j} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g_{i,n} v_{n,j},$$

dengan  $g_{i,n}$  adalah digit ke- $n$  dari kanan ketika  $i$  ditulis dalam representasi biner, yaitu  $\text{gray}(i) = (\dots g_{i,3} g_{i,2} g_{i,1})_2$ . Komponen dari titik dapat dihasilkan dengan hubungan rekursif

$$x_{0,j} = 0 \quad \text{dan} \quad x_{i,j} = x_{i-1,j} \oplus v_{c_i-1,j},$$

dengan  $c_i$  adalah indeks dari digit 0 pertama dari kanan pada representasi biner  $i = (\dots i_3 i_2 i_1)_2$ .

Polinomial primitifnya dapat ditentukan secara unik dengan mendefinisikan  $a_j = (a_{1,j} a_{2,j} \dots a_{s_j-1,j})_2$ . Jadi, setiap polinomial primitif diidentifikasi secara unik dengan derajatnya  $s_j$  dan suatu bilangan asli  $a_j$ . Penentuan penggunaan polinomial primitif adalah

diurutkan berdasarkan  $s_j$  dan  $a_j$  terkecil.

Sebagai contoh, misalkan diinginkan dimensi ke-7 dari barisan Sobol. Dimensi pertamanya dibangun atas barisan van der Corput. Dibutuhkan 6 polinomial primitif dengan derajat terendah sebagai berikut.

- Derajat satu

Banyaknya polinomial primitif derajat satu atas GF(2) adalah  $\frac{\phi(2^1-1)}{1} = \frac{\phi(1)}{1} = 1$ . Polinomial primitif dengan derajat satu adalah  $p_2(x) = x + 1$ . Nilai dari  $s_2$  dan  $a_2$  berturut-turut adalah 1 dan 0.

- Derajat dua

Banyaknya polinomial primitif derajat dua atas GF(2) adalah  $\frac{\phi(2^2-1)}{2} = \frac{\phi(3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Polinomial primitif dengan derajat dua adalah  $p_3(x) = x^2 + 1$ . Nilai dari  $s_3$  dan  $a_3$  berturut-turut adalah 2 dan 2.

- Derajat tiga

Banyaknya polinomial primitif derajat tiga atas GF(2) adalah  $\frac{\phi(2^3-1)}{3} = \frac{\phi(7)}{3} = \frac{6}{3} = 2$ . Polinomial primitif dengan derajat tiga adalah  $x^3 + x^2 + 1$  dan  $x^3 + x + 1$ . Nilai  $a_j$  yang berkorespondensi dengan  $x^3 + x^2 + 1$  dan  $x^3 + x + 1$  berturut-turut adalah  $(10)_2 = 2$  dan  $(1)_2 = 1$ . Karena  $(10)_2 > (1)_2$ , maka  $p_4(x) = x^3 + x + 1$  dan  $p_5(x) = x^3 + x^2 + 1$ . Nilai dari  $s_4$  dan  $a_4$  berturut-turut adalah 3 dan 1, sedangkan nilai dari  $s_5$  dan  $a_5$  berturut-turut adalah 3 dan 2.

- Derajat empat

Banyaknya polinomial primitif derajat empat atas GF(2) adalah  $\frac{\phi(2^4-1)}{4} = \frac{\phi(15)}{4} = \frac{8}{4} = 2$ . Polinomial primitif dengan derajat empat adalah  $x^4 + x^3 + 1$  dan  $x^4 + x + 1$ . Nilai  $a_j$  yang berkorespondensi dengan  $x^4 + x^3 + 1$  dan  $x^4 + x + 1$  berturut-turut adalah  $(100)_2 = 4$  dan  $(1)_2 = 1$ . Karena  $(100)_2 > (1)_2$ , maka  $p_6(x) = x^4 + x + 1$  dan  $p_7(x) = x^4 + x^3 + 1$ . Nilai dari  $s_6$  dan  $a_6$  berturut-turut adalah 4 dan 1, sedangkan nilai dari  $s_7$  dan  $a_7$  berturut-turut adalah 4 dan 4.

Jadi, polinomial primitif yang digunakan untuk dimensi ke-2 hingga ke-7 berturut-turut adalah  $x + 1$ ,  $x^2 + 1$ ,  $x^3 + x + 1$ ,  $x^3 + x^2 + 1$ ,  $x^4 + x + 1$ , dan  $x^4 + x^3 + 1$ . Selain polinomial tersebut, dibutuhkan juga nilai awal  $m_{1,j}, m_{2,j}, \dots, m_{s_j,j}$ . Penentuan nilai awal  $m_{k,j}$  harus berbeda untuk dua polinomial primitif dengan derajat yang sama. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, syarat nilai  $m_{k,j}$  hanyalah ganjil dan  $m_{k,j} < 2^k$ . Namun, ada sifat tambahan untuk keseragaman yang disebut sebagai sifat A.

**Definisi 2.25 (Sifat A).** Sebuah barisan Sobol memiliki sifat A tersebut jika dan hanya jika

$$\det(V_d) \equiv 1 \pmod{2},$$

dengan  $V_d$  adalah matriks pada  $\mathbb{Z}_2^{d \times d}$  (himpunan matriks berukuran  $d \times d$  dengan entri pada  $\text{GF}(2)$ ) yang didefinisikan sebagai

$$V_d := \begin{bmatrix} v_{1,1,1} & v_{2,1,1} & v_{3,1,1} & \cdots & v_{d,1,1} \\ v_{1,2,1} & v_{2,2,1} & v_{3,2,1} & \cdots & v_{d,2,1} \\ v_{1,3,1} & v_{2,3,1} & v_{3,3,1} & \cdots & v_{d,3,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,d,1} & v_{2,d,1} & v_{3,d,1} & \cdots & v_{d,d,1} \end{bmatrix}$$

dengan  $v_{k,j,1}$  adalah digit pertama dari *binary point* (representasi biner dari nilai desimal) milik  $v_{k,j}$ .

Secara geometris, jika *hypercube*  $\mathfrak{R}^s$  dibelah oleh *hyperplane*  $x_j = \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , menjadi sebanyak  $2^s$  kubus (disebut *subcube*) yang sama besar, maka barisan titik pada  $\mathfrak{R}^s$  dikatakan memiliki sifat A jika setelah melakukan pengelompokan  $2^s$  titik berurutan pada  $\mathfrak{R}^s$ , setiap titik berada *subcube* yang berbeda.

Digit pertama dari *binary point* bernilai 1 ketika bilangan tersebut bernilai lebih dari atau sama dengan  $\frac{1}{2}$ . Sebaliknya, digit pertama dari *binary point* bernilai 0 ketika bilangan tersebut bernilai kurang dari  $\frac{1}{2}$ . Notasi  $v_{k,j}$  didefinisikan sebagai  $\frac{m_{k,j}}{2^k}$ , sehingga  $v_{k,j,1} = 1$  ketika  $\frac{m_{k,j}}{2^k} \geq \frac{1}{2}$  dan  $v_{k,j,1} = 0$  ketika  $\frac{m_{k,j}}{2^k} < \frac{1}{2}$ . Terdapat juga kasus khusus untuk dimensi pertama karena komponen dari dimensi tersebut dibentuk atas barisan van der Corput.

**Lema 2.15.** Untuk  $j = 1$ , didefinisikan  $m_{k,1} = 1$ , sehingga berlaku

$$v_{1,1,1} = 1 \quad \text{dan} \quad v_{k,1,1} = 0, k \geq 2.$$

Untuk  $j \geq 2$ , dengan polinomial primitif berderajat  $s_j$  dan pemilihan nilai awal  $m_{k,j}$  untuk  $1 \leq k \leq s_j$ , maka berlaku

$$v_{k,j,1} = \begin{cases} 0, & m_{k,j} < 2^{k-1}, \\ 1, & m_{k,j} > 2^{k-1}. \end{cases}$$

Sebagai contoh, perhatikan dua kasus berikut.

- $k = 5$  dan  $m_{k,j} = 17$  untuk suatu polinomial primitif berderajat setidaknya 5. Nilai dari  $v_{k,j}$  adalah  $\frac{17}{2^5} = \frac{17}{32}$ . Nilai tersebut dapat ditulis sebagai  $2^{-1} + 2^{-5}$ . Karena pangkat tertinggi dari 2 adalah  $-1$ , maka  $v_{k,j,1} = 1$ .
- $k = 5$  dan  $m_{k,j} = 7$  untuk suatu polinomial primitif berderajat setidaknya 5. Nilai dari  $v_{k,j}$  adalah  $\frac{7}{2^5} = \frac{7}{32}$ . Nilai tersebut dapat ditulis sebagai  $2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5}$ . Karena pangkat tertinggi dari 2 adalah  $-3$ , maka  $v_{k,j,1} = 0$ .

Untuk menentukan  $V_d$ , diperlukan juga nilai-nilai  $v_{k,j,1}$  untuk  $k \geq s_j + 1$ .

**Lema 2.16.** Untuk  $j \geq 2$  dan  $k \geq s_j + 1$ , berlaku

$$v_{k,j,1} = \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j,1} \right) \oplus v_{k-s_j,j,1}.$$

**Bukti.** Perhatikan persamaan (2.88), yaitu

$$v_{k,j} = \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j} \right) \oplus v_{k-s_j,j} \oplus \left( \frac{v_{k-s_j,j}}{2^{s_j}} \right),$$

dengan  $\oplus$  berupa operator per digit pada basis 2, sehingga dapat diperhatikan digit pertama saja.

$$v_{k,j,1} = \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j,1} \right) \oplus v_{k-s_j,j,1} \oplus \left( \frac{v_{k-s_j,j,1}}{2^{s_j}} \right).$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{v_{k-s_j,j}}{2^{s_j}} = \frac{m_{k-s_j,j}}{2^k} < \frac{2^{k-s_j}}{2^k} = 2^{-s_j} = \frac{1}{2^{s_j}}.$$

Derajat dari polinomial primitif bernilai setidaknya 1, maka

$$\frac{v_{k-s_j,j}}{2^{s_j}} < \frac{1}{2^{s_j}} \leq \frac{1}{2}.$$

Karena  $\frac{v_{k-s_j,j}}{2^{s_j}} < \frac{1}{2}$ , maka  $\frac{v_{k-s_j,j,1}}{2^{s_j}} = 0$ . Dapat dilihat pada Tabel 2.5 bahwa 0 pada operasi  $\oplus$  menyerupai operasi dengan identitas, yaitu  $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$  untuk  $x = 0, 1$ . Oleh karena itu, berlaku

$$\begin{aligned} v_{k,j,1} &= \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j,1} \right) \oplus v_{k-s_j,j,1} \oplus 0 \\ &= \left( \bigoplus_{i=1}^{s_j-1} a_{i,j} v_{k-i,j,1} \right) \oplus v_{k-s_j,j,1}. \end{aligned}$$

□

Dengan penggunaan sembarang nilai awal  $m_{1,j}, m_{2,j}, \dots, m_{s_j,j}$ , dapat digunakan Lema 2.15 dan 2.16 untuk membentuk  $V_j$  dan mengecek apakah  $\det(V_j) \equiv 1 \pmod{2}$ . Jika  $\det(V_j) \equiv 0 \pmod{2}$ , maka dapat dilakukan modifikasi pada nilai awal yang digunakan sedemikian sehingga  $\det(V_j) \equiv 1 \pmod{2}$ .

Berdasarkan Lema 2.15,  $v_{k,j,1}$  bernilai 0 ketika  $m_{k,j} \in [1, 2^{k-1})$  dan bernilai 1 ketika  $m_{k,j} \in (2^{k-1}, 2^k)$ . Oleh karena itu, nilai  $v_{k,j,1}$  dapat diubah dengan menggantikan nilai awal  $m_{k,j}$  menjadi  $m'_{k,j} = (m_{k,j} + 2^{k-1}) \pmod{2^k}$ .

- $v_{k,j,1} = 0$   
Jika  $m_{k,j} \in [1, 2^{k-1})$ , maka  $(m_{k,j} + 2^{k-1}) \in [2^{k-1} + 1, 2^k)$ . Oleh karena itu, diperoleh  $v'_{k,j,1} = 1$ .
- $v_{k,j,1} = 1$   
Jika  $m_{k,j} \in (2^{k-1}, 2^k)$ , maka  $(m_{k,j} + 2^{k-1}) \in (2^k, 2^{k-1} + 2^k)$ . Jadi, berlaku  $m'_{k,j} = (m_{k,j} + 2^{k-1}) \pmod{2^k} \in (0, 2^{k-1})$ . Oleh karena itu, diperoleh  $v'_{k,j,1} = 0$ .

Ketika  $k = 1$ , operasi tersebut tidak berpengaruh karena bilangan nonnegatif dan ganjil yang kurang dari 2 hanyalah 1, sehingga haruslah  $m_{1,j} = 1$ . Oleh karena itu, penggantian dimulai dari  $k$  terkecil yang mungkin, yaitu 2. Jika penggantian  $m'_{2,j} = (m_{2,j} + 2) \pmod{4}$  tetap menghasilkan  $\det(V_j) \equiv 0 \pmod{2}$ , maka penggantian tersebut dibatalkan dan nilai awal  $m_{2,j}$  tetap digunakan. Penggantian yang dilakukan selanjutnya adalah pada  $k = 3$ , dengan  $m'_{3,j} = (m_{3,j} + 4) \pmod{8}$ . Hal ini dilakukan terus menerus hingga diperoleh  $\det(V_j) \equiv 0 \pmod{2}$  atau mencapai  $m_{s_j,j}$ . Jika proses tersebut masih gagal hingga  $m_{s_j,j}$ , maka ambil pilihan lain untuk nilai awalnya. Namun, menurut perhitungan yang dilakukan Joe & Kuo (2003), proses ini tidak pernah gagal hingga mencapai  $m_{s_j,j}$ .

(Joe & Kuo, 2003, pp. 49-54)

### 2.15.3 Prosedur Quasi-Monte Carlo

Berikut adalah prosedur dalam simulasi quasi-Monte Carlo untuk mengaproksimasi nilai dari suatu fungsi distribusi (Cui & Franchetti, 2013 dan Lemieux, 2009).

1. Menentukan distribusi dari variabel acak  $X$ , misalkan dengan fungsi distribusi  $F_X$ .
2. Menentukan nilai dari fungsi distribusinya, misalkan  $x$ , sedemikian sehingga  $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$
3. Membentuk suatu himpunan  $X_N$  dari  $N$  suku pertama barisan *low discrepancy* dengan dimensi 1, yaitu  $X_N := \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ .
4. Melakukan transformasi terhadap tiap nilai pada  $X_N$  menggunakan fungsi inversi dari cdf *integrated tail distribution* milik distribusi severitas

$$y_k = F^{-1}(x_k).$$

Dengan transformasi tersebut, dibentuk himpunan  $Y_N := \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ ..

5. Mendefinisikan fungsi indikator  $H_j := \mathbf{1}_{y_j \leq u}$  dan  $H := \sum_{j=1}^N H_j$ .
6. Hitung probabilitas  $X$  kurang dari  $x$  dengan estimasi  $\frac{H}{N}$ , untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**BAB 3**  
**FORMULASI *ULTIMATE RUIN PROBABILITY* DENGAN TEOREMA**  
**TITIK TETAP BANACH**

Formula *ultimate ruin probability* dapat dinyatakan berdasarkan persamaan (2.79) dan (2.80) di Bab 2. Hal yang menjadi masalah dalam penggunaan formula Pollaczek-Khinchine adalah perhitungan konvolusi  $F_{X^e}^{*k}(u)$ . Fungsi distribusi dari *integrated tail distribution* hanya memiliki bentuk tertutup untuk beberapa distribusi severitas.

1. Jika  $X \sim \text{Exp}(\beta)$ , maka  $X^e \sim \text{Exp}(\beta)$ .
2. Jika  $X$  berdistribusi hypereksponensial dengan bobot dan parameter berturut-turut  $\{(p_i, \beta_i) | i = 1, 2, \dots, n\}$ , maka  $X^e$  berdistribusi Hypereksponensial dengan bobot dan parameter berturut-turut  $\{(\frac{p_i}{\beta_i} / (\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{\beta_k}), \beta_i) | i = 1, 2, \dots, n\}$ .
3. Jika  $X \sim \text{Lomax}(\lambda, \alpha)$ , maka  $X^e \sim \text{Lomax}(\lambda, \alpha - 1)$ , untuk  $\alpha > 1$ .
4. Jika  $X$  berdistribusi Burr, maka  $X^e$  berdistribusi transformed beta.

(Burnecki et al., 2005, p. 21)

Terlebih lagi, konvolusi ke- $n$  dari cdf *integrated tail distribution* hanya menjadi distribusi yang diketahui ketika severitas berdistribusi eksponensial, yaitu distribusi  $\text{Gamma}(n, \beta)$ . Hal yang serupa berlaku untuk penggunaan persamaan integral Volterra, di mana transformasi Laplace (2.81) dari *ultimate ruin probability* hanya invertibel untuk beberapa jenis severitas.

Oleh karena itu, tugas akhir ini memanfaatkan persamaan integral Volterra dan teorema titik tetap Banach untuk mendapatkan formula lain untuk *ultimate ruin probability* yang serupa dengan (2.79). Selanjutnya, dibahas pemanfaatan quasi-Monte Carlo dalam mengaproksimasi *ultimate ruin probability* dengan rumus yang telah diperoleh sebelumnya. Metode regula falsi (2.9) digunakan jika diperlukan aproksimasi terhadap fungsi inversi dari cdf *integrated tail distribution*.

### 3.1 Formulasi *Ultimate Ruin Probability* dengan Teorema Titik Tetap Banach

Definisikan himpunan fungsi kontinu

$$\mathfrak{G} := \{g | g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ \& } g \text{ kontinu}\}. \quad (3.1)$$

Untuk sembarang dua fungsi  $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ , didefinisikan metrik uniform dengan jarak Euclidean (2.67).

$$\rho(g_1, g_2) := \sup_{u \geq 0} |g_1(u) - g_2(u)| = \|g_1 - g_2\|_{\infty}. \quad (3.2)$$

Dengan pendefinisian (3.1) dan (3.2), dapat didefinisikan ruang metrik  $(\mathfrak{G}, \|\cdot\|_\infty)$ . Selanjutnya, dibuktikan lema berikut.

**Lema 3.1.**  $(\mathfrak{G}, \|\cdot\|_\infty)$  merupakan ruang metrik yang komplit.

**Bukti.** Misalkan  $(g_n(x))$  berupa barisan Cauchy pada  $\mathfrak{G}$  dengan  $x \in [0, \infty)$ . Perhatikan bahwa  $g_n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ . Interval  $[0, 1]$  berupa himpunan tertutup dengan  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . Himpunan  $\mathbb{R}$  berupa ruang metrik yang komplit, sehingga  $[0, 1]$  berupa ruang metrik yang komplit juga (Rudin, 1964, p. 54).

Berikutnya, ditunjukkan bahwa limit *pointwise* dari  $(g_n(x))$  ada pada  $\mathbb{R}$ . Berdasarkan definisi barisan Cauchy pada  $\mathfrak{G}$  (2.9),  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_x(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq N_x(\varepsilon)$ , berlaku  $\|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon$ . Di sisi lain, berlaku

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \sup_{x \geq 0} |g_n(x) - g_m(x)| = \|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Akibatnya,  $(g_n(x))$  berupa barisan Cauchy pada  $\mathbb{R}$ . Oleh karena itu, limit *pointwise* dari  $(g_n(x))$  ada pada  $\mathbb{R}$ . Misalkan limitnya adalah  $g(x) = \lim(g_n(x))$ .

Selanjutnya, dibuktikan bahwa  $(g_n(x))$  konvergen ke  $g(x)$  atas  $\|\cdot\|_\infty$ , yakni  $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ . Hal tersebut ekuivalen dengan membuktikan bahwa  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N \rightarrow \|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$ . Pertama, perhatikan terlebih dahulu  $|g_n(x) - g(x)|$ . Dengan pertidaksamaan segitiga, berlaku

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_m(x)| + |g_m(x) - g(x)|.$$

Karena  $(g_n(x))$  berupa barisan Cauchy, maka dengan definisi yang berlaku pada persamaan (3.3),  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_x(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq N_x(\frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow |g_n(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Dengan konvergensi *pointwise*,  $g_m(x) \rightarrow g(x)$  ketika  $m \rightarrow \infty$  untuk  $x \geq 0$ . Oleh karena itu, dengan Definisi (2.14),  $\forall \varepsilon > 0, \exists M_x(\frac{\varepsilon}{2}) > N_x(\frac{\varepsilon}{2}) \ni \forall m_x \geq M_x(\frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow |g_{m_x}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dengan kedua informasi tersebut, berlaku

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g_{m_x}(x)| + |g_{m_x}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$  berlaku untuk  $n \geq M_x(\frac{\varepsilon}{2})$  dan nilai  $x$  sembarang, di mana  $M_x(\frac{\varepsilon}{2})$  bergantung pada  $x$ . Oleh karena itu,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , yaitu  $N = \sup_{x \geq 0} \{M_x(\frac{\varepsilon}{2})\}$ , sedemikian sehingga  $\forall n \geq N$ , berlaku

$$\sup_{x \geq 0} |g_n(x) - g(x)| = \|g_n - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa  $(g_n(x))$  konvergen ke  $g(x)$  atas  $\|\cdot\|_\infty$ .

Terakhir, karena  $\mathfrak{G}$  adalah himpunan fungsi kontinu, harus dibuktikan bahwa  $g$  berupa fungsi kontinu pada interval  $[0, \infty)$ . Untuk sembarang  $x_0 \in [0, \infty)$  dan  $\varepsilon > 0$ , ingin dicari  $\delta(\varepsilon) > 0$  sedemikian sehingga untuk semua  $x$  yang memenuhi  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ , berlaku  $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ . Dengan pertidaksamaan segitiga, berlaku

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= |g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(x_0) + g_n(x_0) - g(x_0)| \\ &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(x_0)| + |g_n(x_0) - g(x_0)|. \end{aligned}$$

Dengan konvergensi *pointwise*, berlaku  $g_n(u) \rightarrow g(u)$  ketika  $n \rightarrow \infty$  untuk semua  $u \geq 0$ . Berdasarkan definisi konvergensi *pointwise* (2.14),  $\forall \varepsilon > 0, \exists K_x(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq K_x(\varepsilon) \rightarrow |g_n(u) - g(u)| < \varepsilon$  untuk semua  $u \geq 0$ . Oleh karena itu,  $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ , yaitu  $K = \max\{K_x(\frac{\varepsilon}{3}), K_{x_0}(\frac{\varepsilon}{3})\}$ , sedemikian sehingga untuk  $n \geq K$ , berlaku  $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  dan  $|g_n(x_0) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Diketahui  $g_n$  berupa fungsi kontinu pada  $[0, \infty)$ . Oleh karena itu, dengan memperhatikan kekontinuan pada titik  $x_0$  dan berdasarkan definisi fungsi kontinu (2.11),  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\frac{\varepsilon}{3}) > 0 \ni |x - x_0| < \delta_1(\frac{\varepsilon}{3}) \rightarrow |g_n(x) - g_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Dengan ketiga informasi tersebut, dapat disimpulkan bahwa  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$  dan  $\exists K = \max\{K_x(\frac{\varepsilon}{3}), K_{x_0}(\frac{\varepsilon}{3})\}$  sedemikian sehingga untuk  $x$  yang memenuhi  $|x - x_0| < \delta_1(\frac{\varepsilon}{3})$  dan  $n \geq K$ , berlaku

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(x_0)| + |g_n(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $g$  kontinu pada  $x_0$ , di mana  $x_0$  bernilai sembarang pada interval  $[0, \infty)$ . Jadi,  $g$  kontinu pada  $[0, \infty)$  dan berlaku  $g \in \mathfrak{G}$ . Dengan demikian, terbukti bahwa sembarang barisan Cauchy  $(g_n(x))$  pada  $\mathfrak{G}$  konvergen ke  $g(x)$  yang berupa elemen dari  $\mathfrak{G}$ . Berdasarkan Definisi (2.10),  $(\mathfrak{G}, \|\cdot\|_\infty)$  berupa ruang metrik komplet.  $\square$

Perhatikan bahwa fungsi *ultimate ruin probability* adalah anggota dari  $\mathfrak{G}$  karena surplus awal  $u$  bernilai nonnegatif dan probabilitas bernilai minimal 0 dan maksimal 1. Definisikan pemetaan  $T : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$  berdasarkan persamaan integral Volterra (2.80).

$$T(g(u)) := \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u g(u-x)S(x) dx \right) \quad (3.4)$$

Perhatikan bahwa  $T$  terdefinisi jika dan hanya jika  $S(x)$  terintegralkan Riemann pada  $[u, \infty)$  untuk  $u \geq 0$ .

**Lema 3.2.**  $S(x)$  terintegralkan Riemann pada  $[u, \infty)$  jika dan hanya jika  $E[X] < \infty$ .

**Bukti.** Pembuktian dilakukan dari kedua arah.

( $\implies$ ) Jika  $S(x)$  terintegralkan Riemann pada  $[u, \infty)$ , maka  $E[X] < \infty$ .

Misalkan

$$\int_u^\infty S(x) dx = a.$$

Ekspektasi dari  $X$  yang berupa variabel acak kontinu adalah

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty S(x) dx.$$

Definisikan fungsi  $H$  sebagai

$$H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < u, \\ S(x), & x \geq u. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H(x) dx &= \int_0^u dx + \int_u^\infty S(x) dx \\ &= u + a < \infty. \end{aligned}$$

Karena  $S(x) \in [0, 1], \forall x \in [0, \infty)$ , maka

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty S(x) dx \\ &= \int_0^u S(x) dx + \int_u^\infty S(x) dx \\ &\leq \int_0^u dx + \int_u^\infty S(x) dx \\ &= u + a < \infty. \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Jika  $E[X] < \infty$ , maka  $S(x)$  terintegralkan Riemann pada  $[u, \infty)$ . Diberikan

$$E[X] = \int_0^\infty S(x) dx < \infty.$$

Karena  $S(x)$  berupa fungsi nonnegatif, maka

$$\int_u^\infty S(x) dx \leq \int_0^\infty S(x) dx < \infty$$

untuk  $u \geq 0$ .

□

Oleh karena itu, syarat untuk menggunakan (3.4) adalah eksistensi momen pertama dari distribusi severitas.

Berikutnya, dibuktikan bahwa untuk  $g(u) \in \mathfrak{G}$ , maka  $T(g(u))$  adalah fungsi kontinu. Pertama, dibuktikan lema berikut terlebih dahulu.

**Lema 3.3.** Misalkan  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sebagai fungsi yang terintegralkan Riemann atas domainnya. Definisikan fungsi  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sebagai

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

maka  $F$  merupakan fungsi kontinu.

**Bukti.** Misalkan  $c$  suatu konstanta dengan  $c \in [a, b]$ , maka

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(t) dt.$$

Karena  $f$  terintegralkan Riemann, maka  $f$  terbatas pada  $[a, b]$ . Misalkan  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ .

$$\begin{aligned} & -M \leq f(x) \leq M \\ \Leftrightarrow & -\int_c^x M dt \leq \int_c^x f(x) dt \leq \int_c^x M dt \\ \Leftrightarrow & -M(x-c) \leq \int_c^x f(x) dt \leq M(x-c) \\ \Leftrightarrow & \left| \int_c^x f(x) dt \right| \leq M|x-c| \\ \Leftrightarrow & |F(x) - F(c)| \leq M|x-c|. \end{aligned}$$

Dapat dipilih  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$  di mana  $|x-c| < \delta(\varepsilon)$ , sedemikian sehingga  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  sedemikian sehingga untuk semua  $x \in [a, b]$  yang memenuhi  $|x-c| < \delta(\varepsilon)$ , berlaku

$$|F(x) - F(c)| \leq M|x-c| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

Dengan Lema 3.3, dapat dibuktikan lema berikut.

**Lema 3.4.**  $T(g(u))$  kontinu untuk sembarang distribusi severitas kontinu dengan pdf  $f(x)$  dan  $E[X] < \infty$ .

**Bukti.** Diberikan distribusi severitas kontinu dengan pdf  $f(x)$  dan fungsi survivalnya didefinisikan sebagai

$$S(x) = \int_x^\infty f(t) dt, x \in [0, \infty).$$

Karena  $E[X] < \infty$ , maka

$$\int_u^\infty S(x) dx \leq \int_0^\infty S(x) dx = E[X] < \infty,$$

untuk  $u \geq 0$ , sehingga  $\int_u^\infty S(x) dx$  terbatas. Karena fungsi survival selalu terbatas, yakni  $0 \leq S(x) \leq 1$ , maka dengan Lema 3.3, berlaku  $\int_u^\infty S(x) dx$  kontinu.

Sesuai definisi fungsi survival, berlaku  $S(x) \in [0, 1], \forall x \in [0, \infty)$ . Selain itu,  $g(u-x) \in \mathfrak{G}$ , maka  $g(u-x) \leq 1, \forall x \in [0, u]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^u g(u-x)S(x) dx &\leq \int_0^u g(u-x) dx \\ &\leq \int_0^u dx \\ &= u < \infty \end{aligned}$$

$\int_0^u g(u-x)S(x) dx$  terbatas, serta karena  $g(u-x)$  dan  $S(x)$  masing-masing berupa fungsi kontinu,  $g(u-x)S(x)$  berupa fungsi kontinu. Dengan Lema (3.3),  $\int_0^u g(u-x)S(x) dx$  kontinu.

Penjumlahan dari kedua fungsi kontinu juga berupa fungsi kontinu, maka

$$T(g(u)) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u g(u-x)S(x) dx \right)$$

berupa fungsi kontinu. □

Agar  $T(g(u)) \in \mathfrak{G}$ , haruslah  $T(g(u)) \in [0, 1]$ .

**Lema 3.5.** Untuk sembarang  $g \in \mathfrak{G}$ , berlaku  $T(g(u)) \in \mathfrak{G}$ .

**Bukti.** Karena  $0 \leq g(u) \leq 1$ , maka  $0 \leq g(u-x)S(x) \leq S(x)$  untuk  $0 \leq x \leq u$ .

$$\begin{aligned} T(g(u)) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u g(u-x)S(x) dx \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u S(x) dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^\infty S(x) dx \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dengan persamaan (3.5), didapat bahwa  $T(g(u)) \leq \frac{1}{1+\theta} < 1$  untuk sembarang  $u \geq 0$ . Berlaku juga  $T(g(u))$  kontinu, maka  $T(g(u)) \in \mathfrak{G}$  untuk sembarang  $g(u) \in \mathfrak{G}$ . □

Berikutnya, akan dibuktikan  $T$  merupakan pemetaan kontraktif.

**Lema 3.6.** Pemetaan  $T : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$  adalah pemetaan kontraktif.

**Bukti.**

$$\begin{aligned} \rho(T(g_1(u)), T(g_2(u))) &= \sup_{u \geq 0} |T(g_1(u)) - T(g_2(u))| \\ &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u g_1(u-x)S(x) dx - \int_0^u g_2(u-x)S(x) dx \right| \\ &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u [g_1(u-x)S(x) - g_2(u-x)S(x)] dx \right|. \end{aligned}$$

Misalkan  $h_1(x) = g_1(u-x)S(x) - g_2(u-x)S(x)$  dan  $h_2(x) = |h_1(x)| = |g_1(u-x)S(x) - g_2(u-x)S(x)|$ . Berlaku  $h_1(x) \leq h_2(x)$  untuk  $0 \leq x \leq u$  dan  $h_2(x) = |g_1(u-x) - g_2(u-x)| |S(x)| = |g_1(u-x) - g_2(u-x)| S(x)$ , maka

$$\begin{aligned} \rho(T(g_1(u)), T(g_2(u))) &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u [g_1(u-x)S(x) - g_2(u-x)S(x)] dx \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u |g_1(u-x)S(x) - g_2(u-x)S(x)| dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u |g_1(u-x) - g_2(u-x)| S(x) dx. \end{aligned}$$

Dengan teorema nilai ekstrem/*extreme value theorem* (Aguilar, 2022, p. 169), fungsi  $|g_1(u-x) - g_2(u-x)|$  mencapai nilai minimum dan maksimum pada interval tertutup  $[0, u]$ . Oleh karena itu,  $|g_1(u-x) - g_2(u-x)| \leq \sup_{v \in [0, u]} |g_1(v) - g_2(v)| = \rho(g_1, g_2)$  untuk  $0 \leq x \leq u$ .

$$\begin{aligned} \rho(T(g_1(u)), T(g_2(u))) &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u |g_1(u-x) - g_2(u-x)| S(x) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \rho(g_1, g_2) S(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \rho(g_1, g_2) \sup_{u \geq 0} \int_0^u S(x) dx. \end{aligned}$$

Karena  $S(x)$  berupa fungsi nonnegatif, maka berlaku  $\int_0^{u_1} S(x) dx \leq \int_0^{u_2} S(x) dx$  untuk  $0 \leq u_1 < u_2$ . Akibatnya, integral tersebut bernilai maksimal ketika  $u \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \rho(T(g_1(u)), T(g_2(u))) &\leq \frac{\lambda}{c} \rho(g_1, g_2) \sup_{u \geq 0} \int_0^u S(x) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \rho(g_1, g_2) \int_0^{\infty} S(x) dx \\ &= \frac{\lambda \mu}{c} \rho(g_1, g_2) \\ &= \frac{1}{1 + \theta} \rho(g_1, g_2). \end{aligned}$$

$\rho(T(g_1(u)), T(g_2(u))) \leq \frac{1}{1+\theta} \rho(g_1, g_2)$  dengan  $0 < \frac{1}{1+\theta} < 1$  untuk  $\theta > 0$ , maka terbukti  $T$  berupa pemetaan kontraktif.  $\square$

Karena  $T$  berupa pemetaan kontraktif pada  $\mathfrak{G}$ , maka pasti ada titik tetap  $\psi(u) \in \mathfrak{G}$  sehingga  $T(\psi(u)) = \psi(u)$ . Oleh karena itu, dapat dikonstruksi barisan  $(\psi_n(u))$  sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \psi(u)$ .

Barisan dibentuk berdasarkan persamaan integral Volterra dengan hubungan rekursif

$$\psi_n(u) = T(\psi_{n-1}(u)) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi_{n-1}(u-x) S(x) dx \right), n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Dapat dipilih sembarang fungsi  $\psi_0(u) \in \mathfrak{G}$  sebagai inisiasi awal. Pemilihan  $\psi_0(u)$  tidak memiliki pengaruh besar karena barisan  $(\psi_n(u))$  tetap konvergen ke suatu nilai. Oleh karena itu, pilih  $\psi_0(u)$  sebagai fungsi yang sederhana, yaitu fungsi konstan dengan  $\psi_0(u) \in [0, 1], \forall u \geq 0$ .

Persamaan (3.6) dapat dimodifikasi sehingga persamaannya dalam variabel faktor *loading*  $\theta$  dan menggunakan pdf  ${}_kL$  yang telah didefinisikan pada persamaan (2.76).

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi_{n-1}(u-x) S(x) dx \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \left( \int_u^\infty \frac{S(x)}{\mu} dx + \int_0^u \psi_{n-1}(u-x) \frac{S(x)}{\mu} dx \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \left( \int_u^\infty f_{X^e}(x) dx + \int_0^u \psi_{n-1}(u-x) f_{X^e}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left( 1 - F_{X^e}(u) + \int_0^u \psi_{n-1}(u-x) f_{X^e}(x) dx \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Selanjutnya, dicari rumus umum untuk  $\psi_n(u)$  dengan menggunakan induksi.

**Teorema 3.7.** Untuk sembarang  $\psi_0(u) = k \in [0, 1]$ ,  $\psi_n(u)$  memiliki bentuk

$$\psi_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta} - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*n}(u) - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) & , n \geq 2, \\ \frac{1}{1+\theta} - \left( \frac{1}{1+\theta} \right) (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}(u) & , n = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

**Bukti.** Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi. Misalkan  $\rho = \frac{1}{1+\theta}$  untuk menyederhanakan penulisan. Untuk sembarang  $\psi_0(u) \in [0, 1]$  yang bernilai konstan,

berlaku

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= T(\psi_0(u)) \\
&= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \int_0^u \psi_0(u-x) f_{X^e}(x) dx \right) \\
&= \rho (1 - F_{X^e}(u) + \psi_0(u-x) F_{X^e}(u)) \\
&= \rho - \rho(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}(u).
\end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n = 1$ . Selanjutnya, dibuktikan rumusnya berlaku untuk  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}
\psi_2(u) &= T(\psi_1(u)) \\
&= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \int_0^u \psi_1(u-x) f_{X^e}(x) dx \right) \\
&= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \int_0^u (\rho - \rho(1 - \psi_0(u-x)) F_{X^e}(u-x)) f_{X^e}(x) dx \right) \\
&= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \rho \left( \int_0^u f_{X^e}(x) dx - (1 - \psi_0(u)) \int_0^u F_{X^e}(u-x) f_{X^e}(x) dx \right) \right) \\
&= \rho (1 - F_{X^e}(u) + \rho (F_{X^e}(u) - (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*2}(u))) \\
&= \rho - \rho^2(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*2}(u) - (1 - \rho) \rho F_{X^e}(u).
\end{aligned}$$

Terbukti berlaku untuk  $n = 2$ . Asumsikan  $\psi_n(u) = \rho - \rho^n(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*n}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^k F_{X^e}^{*k}(u)$  untuk suatu  $n \geq 2$ . Berikutnya, dibuktikan rumus tersebut juga berlaku untuk  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= T(\psi_n(u)) \\
&= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \int_0^u \psi_n(u-x) f_{X^e}(x) dx \right). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Bentuk dari  $\int_0^u \psi_n(u-x) f_{X^e}(x) dx$  disederhanakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&\int_0^u \psi_n(u-x) f_{X^e}(x) dx \\
&= \int_0^u \left( \rho - \rho^n(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*n}(u-x) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^k F_{X^e}^{*k}(u-x) \right) f_{X^e}(x) dx \\
&= \int_0^u \rho f_{X^e}(x) dx - \rho^n(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*n}(u-x) f_{X^e}(x) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^k F_{X^e}^{*k}(u-x) f_{X^e}(x) dx \\
&= \rho F_{X^e}(u) - \rho^n(1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*(n+1)}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^k F_{X^e}^{*(k+1)}(u). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.10) ke persamaan (3.9).

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \rho \left( 1 - F_{X^e}(u) + \rho F_{X^e}(u) - \rho^n (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*(n+1)}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^k F_{X^e}^{*(k+1)}(u) \right) \\
&= \rho - (1 - \rho) \rho F_{X^e}(u) - \rho^{n+1} (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*(n+1)}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{k+1} F_{X^e}^{*(k+1)}(u) \\
&= \rho - \rho^{n+1} (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*(n+1)}(u) - (1 - \rho) \rho F_{X^e}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=2}^n \rho^k F_{X^e}^{*(k)}(u) \\
&= \rho - \rho^{n+1} (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*(n+1)}(u) - (1 - \rho) \sum_{k=1}^n \rho^k F_{X^e}^{*(k)}(u).
\end{aligned}$$

□

Ketika  $n \rightarrow \infty$ , formula (3.8) menjadi formula Pollaczek-Khinchine (2.79).

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 + \theta} - (1 - \psi_0(u)) \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^n F_{X^e}^{*n}(u) - \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \right] \\
&= \frac{1}{1 + \theta} - \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \\
&= 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^0 F_{X^e}^{*0}(u) - \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1 + \theta} \right) \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Selanjutnya, dianalisis faktor-faktor yang memengaruhi *ultimate ruin probability* (selain distribusi dan parameternya), yaitu *capital* awal  $u$  dan faktor *loading*  $\theta$ .

- *Capital* awal

Secara intuitif, kenaikan *capital* awal mengurangi *ultimate ruin probability* karena dibutuhkan defisit yang lebih besar untuk mencapai *ruin*. Secara analitik, dapat diperhatikan persamaan (2.79).

$$\psi(u) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1 + \theta} \right) \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u).$$

Turunan dari fungsi  $\psi(u)$  adalah

$$\psi'(u) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1 + \theta} \right) \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^k f_{X^e}^{*k}(u). \tag{3.12}$$

$f_{X^e}^{*k}(u) > 0$  untuk  $u > 0$ , maka  $\psi'(u) < 0$  untuk semua  $u > 0$ . Oleh karena itu, fungsi  $\psi(u)$  adalah fungsi yang turun ketat.

- Faktor *loading*

Pada dasarnya, kenaikan faktor *loading* pasti menurunkan *ultimate ruin probability* karena pendapatan perusahaan dari premi meningkat. Secara matematis, hal ini dapat dilihat dari persamaan (2.80).

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx \right).$$

Jika dimisalkan fungsi *ultimate ruin probability* adalah fungsi terhadap  $\theta$ , yakni  $\psi(u) = T(\theta)$ , maka dapat dilihat bahwa

$$T'(\theta) = -\frac{1}{(1+\theta)^2\mu} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx \right) = -\frac{\psi(u)}{1+\theta}. \quad (3.13)$$

$\psi(u) > 0$  dan  $\theta > 0$ , maka  $T'(\theta) < 0$ . Jadi, fungsi  $T(\theta)$  berupa fungsi yang turun ketat terhadap  $\theta$ . Jika  $T(\theta)$  diturunkan dua kali terhadap  $\theta$ , diperoleh

$$T''(\theta) = \frac{2}{(1+\theta)^3\mu} \left( \int_u^\infty S(x) dx + \int_0^u \psi(u-x)S(x) dx \right) = \frac{2\psi(u)}{(1+\theta)^2}. \quad (3.14)$$

$\psi(u) > 0$  dan  $\theta > 0$ , maka  $T''(\theta) > 0$ . Oleh karena itu,  $T(\theta)$  berupa fungsi konveks. Dengan pertidaksamaan Jensen (McShane, 1937), untuk  $0 < \theta_1 < \theta_2$ , berlaku

$$T(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq tT(\theta_1) + (1-t)T(\theta_2), t \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

Selanjutnya, ditinjau pemilihan nilai awal  $\psi_0$ . Walaupun  $(\psi_n(u)) \rightarrow \psi(u)$  untuk semua pilihan  $\psi_0(u) \in [0, 1]$ , terdapat pemilihan nilai  $\psi_0(u)$  sedemikian sehingga  $(\psi_n(u))$  berupa barisan yang monoton turun untuk semua  $u \geq 0$ . Ketika barisan  $(\psi_n(u))$  tidak monoton, cukup sulit untuk menentukan batas errornya. Dengan menggunakan barisan yang monoton turun, dapat diperoleh batas atas untuk error  $|\psi - \psi_n|$  untuk semua  $u \geq 0$ . Pertama, dibuktikan proposisi berikut.

**Proposisi 3.8.** Jika  $\psi_0 \in \left[ \frac{1}{1+\theta}, 1 \right]$ , maka  $(\psi_n)$  berupa barisan yang monoton turun.

**Bukti.** Untuk kasus dasar, berlaku

$$\psi_1 - \psi_0 = \frac{1}{1+\theta} - \left( \frac{1}{1+\theta} \right) (1 - \psi_0(u))F_{X^e}(u) - \psi_0.$$

Karena  $F_{X^e}(u) \geq 0$ , maka

$$\begin{aligned}\psi_1 - \psi_0 &= \frac{1}{1+\theta} - \left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0(u))F_{X^e}(u) - \psi_0 \\ &\leq \frac{1}{1+\theta} - \psi_0.\end{aligned}$$

Jelas bahwa  $\psi_1 \leq \psi_0$  jika  $\frac{1}{1+\theta} \leq \psi_0$ . Selanjutnya, dibuktikan  $\psi_n \leq \psi_{n-1}$  untuk  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned}\psi_n - \psi_{n-1} &= -\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*n}(u) + \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n-1} (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*(n-1)}(u) \\ &\quad - \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n-1} F_{X^e}^{*(n-1)}(u) \\ &\propto -\left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*n}(u) + (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - \frac{\theta}{1+\theta} F_{X^e}^{*(n-1)}(u) \\ &= \left(\frac{1}{1+\theta} - \psi_0\right) F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - \left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*n}(u).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Pembuktian dilakukan dengan kontraposisif. Asumsikan bahwa  $(\psi_n(u))$  monoton naik. Dengan persamaan (3.16), berlaku  $\psi_n(u) \geq \psi_{n-1}$ , yang ekuivalen dengan  $\left(\frac{1}{1+\theta} - \psi_0\right) F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - \left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*n}(u) \geq 0$ , sehingga

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{1+\theta} - \psi_0\right) F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - \left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0)F_{X^e}^{*n}(u) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \psi_0 \left(\frac{1}{1+\theta} F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)\right) - \frac{1}{1+\theta} \left(F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \psi_0 \left(\frac{1}{1+\theta} F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)\right) &\geq \frac{1}{1+\theta} \left(F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Berikutnya, dibuktikan lema berikut.

**Lema 3.9.** Untuk sembarang variabel acak kontinu  $X$  yang terdefinisi pada  $\mathbb{R}^+$  dengan pdf  $f_X(x)$  dan cdf  $F_X(x)$ , berlaku  $F_X^{*n}(x) < F_X^{*(n-1)}(x)$  untuk semua  $x > 0$  dan  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bukti.** Untuk kasus dasar  $n = 1$ , jelas bahwa  $F_X(x) < F_X^{*0}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$ . Untuk kasus  $n \geq 2$ , dengan persamaan (2.63), berlaku  $F_X^{*n}(x) = \int_0^x F_X^{*(n-1)}(x-y)f(y) dy$ . Karena

cdf berupa fungsi yang naik tegas, maka  $F_X^{*(n-1)}(x-y) < F_X^{*(n-1)}(x), \forall y \in (0, x)$ .

$$\begin{aligned}
F_X^{*n}(x) &= \int_0^x F_X^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy \\
&\leq \int_0^x F_X^{*(n-1)}(x) f_X(y) dy \\
&= F_X^{*(n-1)}(x) \int_0^x f_X(y) dy \\
&= F_X^{*(n-1)}(x) F_X(x) \\
&< F_X^{*(n-1)}(x).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

□

Akibatnya,  $\frac{1}{1+\theta} F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u) < F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u) < 0$ . Dengan menggunakan Lema 3.9, dapat dilanjutkan pertidaksamaan (3.17).

$$\begin{aligned}
\psi_0 &\leq \frac{1}{1+\theta} \left( \frac{F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)}{\frac{1}{1+\theta} F_{X^e}^{*n}(u) - F_{X^e}^{*(n-1)}(u)} \right) \\
&= \frac{F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - F_{X^e}^{*n}(u)}{(1+\theta) F_{X^e}^{*(n-1)}(u) - F_{X^e}^{*n}(u)} \\
&< \frac{F_{X^e}^{*(n-1)}(u)}{(1+\theta) F_{X^e}^{*(n-1)}(u)} \\
&= \frac{1}{1+\theta}.
\end{aligned}$$

Agar  $(\psi_n)$  monoton naik, haruslah  $\psi_0 < \frac{1}{1+\theta}$ . Oleh karena itu, dengan kontrapositif, jika  $\psi_0 \geq \frac{1}{1+\theta}$ , maka  $(\psi_n)$  monoton turun. □

Oleh karena itu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \psi(u) \leq \psi_n(u), \forall n \in \mathbb{N}$ . Selanjutnya, ditentukan batas error  $|\psi(u) - \psi_n(u)|$  dengan menggunakan definisi konvergensi barisan (2.8). Karena  $\psi_n(u) \geq \psi(u)$ , maka  $|\psi(u) - \psi_n(u)| = \psi_n(u) - \psi(u) \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
|\psi_n(u) - \psi(u)| &= \left| \left[ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \right] - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u) F_{X^e}^{*n}(u)) \right| \\
&= \left[ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \right] - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u) F_{X^e}^{*n}(u)).
\end{aligned}$$

Karena  $F_X^{*n}(x) < F_X^{*(n-1)}(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$ , maka

$$\begin{aligned} |\psi_n(u) - \psi(u)| &= \left[ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \right] - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u) F_{X^e}^{*n}(u)) \\ &< \left[ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*n}(u) \right] - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u) F_{X^e}^{*n}(u)) \\ &= F_{X^e}^{*n}(u) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k - (1 - \psi_0(u)) \right]. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k$  merupakan deret geometri tak hingga yang konvergen dengan rasio  $\frac{1}{1+\theta}$ , sehingga nilainya adalah  $\frac{1}{1 - \frac{1}{1+\theta}} = \frac{1+\theta}{\theta}$ .

$$\begin{aligned} |\psi_n(u) - \psi(u)| &= \left[ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k F_{X^e}^{*k}(u) \right] - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u) F_{X^e}^{*n}(u)) \\ &< F_{X^e}^{*n}(u) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \left[ \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1+\theta}{\theta} \right) - (1 - \psi_0(u)) \right] \\ &= F_{X^e}^{*n}(u) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \psi_0(u). \end{aligned}$$

Nilai  $\psi_0(u)$  yang meminimalkan batas eror dengan syarat barisannya berupa barisan yang monoton turun adalah  $\frac{1}{1+\theta}$ , sedemikian sehingga berlaku

$$|\psi_n(u) - \psi(u)| < F_{X^e}^{*n}(u) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1}. \quad (3.19)$$

Oleh karena itu, nilai  $\psi_0(u)$  yang digunakan adalah  $\frac{1}{1+\theta}$ . Karena nilai dari  $F_{X^e}^{*n}(u)$  sulit untuk dihitung, maka dapat ditentukan batas yang lebih mudah dihitung berdasarkan persamaan (3.18). Pada persamaan tersebut, dapat dilihat bahwa  $F_{X^e}^{*n}(x) \leq F_{X^e}^{*(n-1)}(x) F_{X^e}(x)$ , yang ekuivalen dengan  $\frac{F_{X^e}^{*n}(x)}{F_{X^e}^{*(n-1)}(x)} \leq F_{X^e}(x), \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\prod_{k=1}^n \frac{F_{X^e}^{*k}(x)}{F_{X^e}^{*(k-1)}(x)} = F_{X^e}^{*n}(x) \leq (F_{X^e}(x))^n.$$

Jadi, pertidaksamaan (3.19) menjadi

$$|\psi_n(u) - \psi(u)| < F_{X^e}^{*n}(u) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1} \leq (F_{X^e}(u))^n \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1}. \quad (3.20)$$

Karena  $0 \leq F_{X^e}(u) < 1$  untuk  $u \geq 0$  dan  $0 < \frac{1}{1+\theta} < 1$ , maka  $(F_{X^e}(u))^n$  dan  $\left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1}$  keduanya konvergen ke 0. Dengan definisi kekonvergenan barisan (2.8),  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni$

$\forall n \geq N$ , berlaku

$$|\psi_n(u) - \psi(u)| < (F_{X^e}(u))^n \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1} < \varepsilon. \quad (3.21)$$

Jika diinginkan eror bernilai maksimal  $\varepsilon$ , maka dapat ditentukan nilai  $n$  yang bersesuaian.

$$\begin{aligned} (F_{X^e}(u))^n \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n+1} &< \varepsilon \\ \left( \frac{F_{X^e}(u)}{1+\theta} \right)^n \frac{1}{1+\theta} &< \varepsilon \\ n \ln \left( \frac{F_{X^e}(u)}{1+\theta} \right) &< \ln [(1+\theta)\varepsilon] \\ n &> \frac{\ln [(1+\theta)\varepsilon]}{\ln \left( \frac{F_{X^e}(u)}{1+\theta} \right)}. \end{aligned}$$

Berlaku  $\ln [(1+\theta)\varepsilon] = \ln(1+\theta) + \ln \varepsilon$  dan  $\ln \left( \frac{F_{X^e}(u)}{1+\theta} \right) = \ln(F_{X^e}(u)) - \ln(1+\theta)$ . Jadi, dapat dipilih  $N = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{\ln(1+\theta) + \ln \varepsilon}{\ln(F_{X^e}(u)) - \ln(1+\theta)} \right\rceil \right\}$  sedemikian sehingga untuk semua  $n \geq N$ , berlaku  $|\psi_n(u) - \psi(u)| < \varepsilon$ . Namun, perlu diperhatikan bahwa eror tersebut berlaku dengan asumsi  $F_{X^e}(u)$  eksak. Untuk kasus di mana  $F_{X^e}(u)$  diestimasi dan terdapat eror, maka eror akan bernilai lebih besar.

Seperti yang telah disebutkan pada pendahuluan Bab 3, konvolusi ke- $n$  dari cdf *integrated tail distribution* hanya menjadi distribusi yang diketahui ketika severitas berdistribusi eksponensial, yaitu distribusi Gamma( $n, \beta$ ). Selanjutnya, dicari bentuk eksplisit dari  $\psi_n(u)$  dan  $\psi(u)$  untuk severitas klaim yang berdistribusi eksponensial.

**Proposisi 3.10.** Dengan formula Pollaczek-Khinchine, *ultimate ruin probability*  $\psi(u)$  untuk distribusi severitas klaim eksponensial dengan parameter  $\beta$  adalah

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp \left( -\frac{\theta\beta u}{1+\theta} \right). \quad (3.22)$$

**Bukti.** Misalkan distribusi dari severitas klaim mengikuti variabel acak  $X$ , dengan  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  yang memiliki fungsi distribusi  $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$  dan ekspektasi  $\mu_X = \frac{1}{\beta}$  (2.2).

$$F_{X^e}(u) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^u S_X(t) dt = \beta \int_0^u e^{-\beta t} dt = \beta \left[ -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right]_0^u = 1 - e^{-\beta u} = F_X(u).$$

Berdasarkan cdf-nya,  $X^e$  memiliki distribusi yang sama dengan  $X$ , yaitu  $X^e \sim \text{Exp}(\beta)$ . Di sisi lain, penjumlahan dari  $n$  variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter  $\beta$  adalah distribusi gama dengan parameter *shape*  $n$  dan *rate*  $\beta$ . Selanjutnya,

dicari bentuk dari  $F_{X^e}^{*n}(u)$ , untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ .

$$F_{X^e}^{*n}(u) = \frac{\gamma(n, \beta u)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\beta u} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (3.23)$$

Perhatikan bahwa  $\frac{d^n}{dt^n}(t^{n-1}) = 0$  dan  $e^{-t}$  terintegralkan Riemann, maka dapat digunakan metode integral parsial dengan  $v(t) = t^{n-1}$  dan  $w^{(n)}(t) = e^{-t}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta u} t^{n-1} e^{-t} dt &= [-t^{n-1} e^{-t}]_0^{\beta u} + \int_0^{\beta u} e^{-t} (n-1) t^{n-2} dt \\ &= [-t^{n-1} e^{-t}]_0^{\beta u} + (n-1) [-t^{n-2} e^{-t}]_0^{\beta u} + (n-1) \int_0^{\beta u} e^{-t} (n-2) t^{n-3} dt \\ &\quad \vdots \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n -\frac{(n-1)!}{(n-i)!} t^{n-i} e^{-t} \right]_0^{\beta u} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n -\frac{(n-1)!}{(n-i)!} (\beta u)^{n-i} e^{-\beta u} \right) + (n-1)!. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substitusi hasil integral (3.24) ke persamaan (3.23), diperoleh

$$\begin{aligned} F_{X^e}^{*n}(u) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[ \left( \sum_{i=1}^n -\frac{(n-1)!}{(n-i)!} (\beta u)^{n-i} e^{-\beta u} \right) + (n-1)! \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[ e^{-\beta u} \left( \sum_{i=1}^n -\frac{(n-1)!}{(n-i)!} (\beta u)^{n-i} \right) + (n-1)! \right] \\ &= 1 - e^{-\beta u} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Substitusi konvolusi 3.25 ke persamaan (3.8),

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= 1 - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u)) \left[ 1 - e^{-\beta u} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \right] \\ &\quad - \sum_{m=0}^{n-1} \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^m \left[ 1 - e^{-\beta u} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \right] \\ &= 1 - \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n (1 - \psi_0(u)) \left[ 1 - e^{-\beta u} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \right] \\ &\quad - \left( \frac{\theta}{1+\theta} \right) \left[ 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^m \left[ 1 - e^{-\beta u} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Persamaan (3.26) dapat disederhanakan lebih lanjut ketika  $\psi_0(u) = \frac{1}{1+\theta}$ .

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &= 1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left[1 - e^{-\beta u} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right)\right] \\
&\quad - \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m \left[1 - e^{-\beta u} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right)\right]\right] \\
&= \frac{1}{1+\theta} - \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m \left[1 - e^{-\beta u} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+\theta} - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m + \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Suku kedua merupakan deret geometri yang bentuknya dapat disederhanakan.

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m = \frac{1}{1+\theta} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m = \frac{1}{1+\theta} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+\theta}} = \frac{1}{\theta} \left[1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n\right].$$

Jadi, bentuk persamaan (3.27) dapat disederhanakan menjadi

$$\psi_n(u) = \frac{1}{1+\theta} - \frac{1}{1+\theta} \left[1 - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n\right] + \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right). \tag{3.28}$$

Ketika  $n \rightarrow \infty$ , berlaku  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n = 0$ , maka

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right). \tag{3.29}$$

Berikutnya, ditunjukkan bahwa dengan menggunakan formula Pollaczek-Khinchine, dapat diperoleh hasil yang sama. Substitusi konvolusi (3.25) ke formula Pollaczek-Khinchine (2.79).

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left[1 - e^{-\beta u} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right)\right] \\
&= 1 - \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left[1 - e^{-\beta u} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right)\right]\right] \\
&= \frac{1}{1+\theta} - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n + \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k\right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Perhatikan bahwa karena  $\theta > 0$ , maka  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n$  berupa deret geometri tak hingga

dengan suku pertama  $\frac{1}{1+\theta}$  dan rasio  $\frac{1}{1+\theta}$ .

$$\frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n = \frac{\theta}{(1+\theta)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right)} = \frac{\theta}{(1+\theta)^2} \frac{1+\theta}{\theta} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Dengan demikian, persamaan (3.30) dapat disederhanakan menjadi

$$\psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right). \quad (3.31)$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.31) sama dengan persamaan (3.29). Persamaan ini dapat disederhanakan lebih lanjut.

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k \right) \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k. \end{aligned}$$

Karena  $\left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k$  positif dan berhingga, serta sumasinya terhingga, maka dengan teorema Tonelli, urutan sumasinya dapat ditukar (Bartle, 1966, p. 131).

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n \frac{1}{k!} (\beta u)^k \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\beta u)^k \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n-k} \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k \frac{1}{k!} (\beta u)^k \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^{n-k} \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^k \frac{1}{k!} (\beta u)^k \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Karena  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n$  berupa deret geometri tak hingga dengan suku awal 1 dan rasio  $\frac{1}{1+\theta}$ , maka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\theta}} = \frac{1+\theta}{\theta}. \quad (3.33)$$

Substitusi persamaan (3.33) ke persamaan (3.32),

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\theta}{(1+\theta)^2} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{1}{k!} (\beta u)^k \left(\frac{1+\theta}{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta u}{1+\theta}\right)^k \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta u}{1+\theta}\right)^k \frac{1}{k!}$  merupakan deret Maclaurin dari  $\exp\left(\frac{\beta u}{1+\theta}\right)$ , maka

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} \exp(-\beta u) \exp\left(\frac{\beta u}{1+\theta}\right) \\ &= \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1+\theta}\right).\end{aligned}$$

□

Dengan menggunakan persamaan integral Volterra (2.80) dan transformasi Laplace (2.81), dapat diperoleh fungsi *ultimate ruin probability* yang sama dengan (3.22).

**Proposisi 3.11.** Dengan persamaan integral Volterra, *ultimate ruin probability*  $\psi(u)$  untuk distribusi severitas klaim eksponensial dengan parameter  $\beta$  adalah

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1+\theta}\right). \quad (3.34)$$

**Bukti.** Berdasarkan pdf dari distribusi eksponensial (2.30), dicari transformasi Laplace untuk pdf-nya, yaitu  $\mathcal{L}\{f\}(s)$ .

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \beta e^{-\beta u} du = \beta \left[ -\frac{1}{\beta+s} e^{-(\beta+s)u} \right]_0^{\infty} = \frac{\beta}{\beta+s}.$$

Substitusi  $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$  ke persamaan (2.81) dan  $E[X] = \frac{1}{\beta}$ .

$$\mathcal{L}\{\psi\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \frac{\lambda}{\beta}}{cs - \lambda \left[1 - \frac{\beta}{\beta+s}\right]} = \frac{\frac{\lambda}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta+s}}{cs - \frac{\lambda s}{\beta+s}} = \frac{\frac{\lambda}{\beta c}}{\beta + s - \frac{\lambda}{c}}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\psi\}(s) &= \frac{\frac{\lambda}{\beta c}}{\beta + s - \frac{\lambda}{c}} \\ &= \frac{\lambda}{\beta c} \left[ -\frac{1}{\beta + s - \frac{\lambda}{c}} e^{-(s+\beta-\frac{\lambda}{c})u} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\beta c} \int_0^{\infty} e^{-su} e^{-(\beta-\frac{\lambda}{c})u} du.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} = \frac{\lambda}{\beta c} \exp\left(-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u\right).$$

Dengan  $c = (1 + \theta)\lambda\mu = (1 + \theta)\frac{\lambda}{\beta}$ ,

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(-\left(\beta - \frac{\beta}{1 + \theta}\right)u\right) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1 + \theta}\right).$$

□

Formula (3.22) digunakan untuk membandingkan nilai aktual *ultimate ruin probability* ketika distribusi severitas klaim berdistribusi eksponensial dengan aproksimasinya menggunakan metode yang diajukan.

### 3.2 Metode Quasi-Monte Carlo untuk Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability*

Aproksimasi dengan rumus (3.8) membutuhkan konvolusi ke- $n$  dari cdf *integrated tail distribution* severitas klaim (2.74). Jika mengikuti prosedur pada (2.15.3), maka dibutuhkan simulasi sebanyak  $n$  kali, masing-masing menghitung cdf dari penjumlahan  $k$  variabel acak *integrated tail distribution*, dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ . Oleh karena itu, pada tugas akhir ini, dilakukan modifikasi sehingga estimasi seluruh konvolusi  $F_{X^e}^{*k}(u)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  dapat diaproksimasi dengan menggunakan satu sampel data. Berikut adalah prosedur yang digunakan untuk aproksimasi *ultimate ruin probability* berdasarkan metode quasi-Monte Carlo.

1. Menentukan distribusi severitas klaim yang bersesuaian, misalkan dengan fungsi distribusi  $F_X(u)$  dan *integrated tail distribution*  $F_{X^e}(u)$ , serta *capital* awal  $u$ .
2. Menentukan batas aproksimasi dengan menentukan derajat konvolusi tertinggi, misalkan  $n$ . *Ultimate ruin probability* diaproksimasi dengan  $\psi_n(u)$  yang didefinisikan pada persamaan (3.8).
3. Misalkan  $S = (s_1, s_2, s_3, \dots)$  berupa barisan Sobol dengan dimensi  $n$ . Misalkan  $N$  adalah jumlah sampel. Bentuk barisan berhingga  $S_N$  dari  $N$  suku pertama barisan Sobol  $S$  dengan dimensi  $n$ , yaitu  $S_N := \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ , dengan  $s_k = (s_{k,1}, s_{k,2}, \dots, s_{k,n})$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Banyaknya sampel yang direkomendasikan adalah  $N = 2^M$ , untuk suatu  $M \in \mathbb{N}$ , dengan tujuan mempertahankan sifat keseragaman yang dimiliki barisan Sobol (Sobol, 1998). Selain itu, karena  $s_1$  selalu berupa  $\mathbf{0}$  pada  $\mathfrak{R}^n$ , maka  $s_1$  dieksklusi. Jadi, banyaknya sampel yang digunakan adalah  $2^M - 1$ , yakni  $s_2, s_3, \dots, s_{2^M-1}$ .

4. Melakukan transformasi untuk tiap komponen pada  $n$ -tuple  $s_k$  menggunakan fungsi inversi dari cdf *integrated tail distribution* severitas klaim untuk memperoleh sampel dari *integrated tail distribution* severitas klaim,

$$x_{k,m} = F_{X^e}^{-1}(s_{k,m}), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (3.35)$$

Bentuk dari  $F_{X^e}^{-1}(s_{k,m})$  bergantung pada distribusi severitas klaim. Dengan transformasi tersebut, dihasilkan himpunan  $x_N := \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  dengan  $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}), k = 1, 2, \dots, N$ .

5. Untuk mengestimasi  $F_{X^e}^{*j}(u) = \Pr(X_1^e + X_2^e + \dots + X_j^e < u)$ , diperlukan  $j$  sampel independen yang diperoleh dari *integrated tail distribution* severitas klaim. Berikut adalah langkah untuk mengestimasi  $F_{X^e}^{*j}(u)$ .

- Untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, n$ , definisikan  $z_{k,j} := \sum_{i=1}^j x_{k,i}$ ,  $z_k = (z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,n})$ , dan  $Z_N := \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ . Dengan pendefinisian tersebut, komponen ke- $j$  dari titik ke- $k$  dapat dipandang sebagai sampel dari penjumlahan  $j$  sampel *integrated tail distribution* severitas klaim. Notasinya dalam variabel acak adalah

$$Z_{k,j} = \sum_{i=1}^j X_i^e.$$

Variabel acak  $Z_{1,j}, Z_{2,j}, \dots, Z_{k,j}$  digunakan untuk mengestimasi  $F_{X^e}^{*j}(u)$  dengan metode Monte Carlo (2.84).

- Mendefinisikan fungsi indikator  $H_{j,k} := \mathbf{1}_{z_{k,j} \leq u}$ . Fungsi ini memeriksa apakah komponen ke- $j$  dari titik  $z_k$  bernilai kurang dari atau sama dengan  $u$ .
  - Mendefinisikan  $H_j := \sum_{k=1}^N H_{j,k}$ . Fungsi  $H_j$  menunjukkan berapa banyak komponen ke- $j$  yang bernilai kurang dari atau sama dengan  $u$  dari seluruh  $N$  titik.
  - Dengan menggunakan persamaan (2.84),  $F_{X^e}^{*j}(u) = \Pr(X_1^e + X_2^e + \dots + X_j^e < u)$  diestimasi dengan  $\hat{F}_{X^e}^{*j}(u) = \frac{H_j}{N}$ , untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ .
6. Dengan estimasi  $F_{X^e}^{*j}(u), j = 1, 2, \dots, n$ , maka *ultimate ruin probability* dapat dihitung dengan rumus (3.8).

### 3.3 Integrated Tail Distribution Untuk Beberapa Jenis Distribusi

Dengan menggunakan prosedur pada subbab sebelumnya, diperlukan cdf *integrated tail distribution* severitas klaim untuk menghasilkan sampel nilai (3.35). Nilai-nilai tersebut dibutuhkan untuk mengaproksimasi *ultimate ruin probability* dengan formula (3.8). Untuk menjamin bahwa inversi dari cdf *integrated tail distribution* ada, dibuktikan lema berikut.

**Lema 3.12.** Sebuah fungsi  $f : A \rightarrow B$  invertibel jika dan hanya jika  $f$  bijektif.

**Bukti.** Pembuktian dilakukan dari kedua arah.

- Jika  $f : A \rightarrow B$  bijektif, maka  $f$  invertibel.

Karena  $f$  surjektif, maka untuk semua  $b \in B$ , terdapat  $a \in A$  sedemikian sehingga  $f(a) = b$ . Karena  $f$  injektif, maka  $x = a$  berupa elemen unik yang memenuhi  $f(x) = b$ . Oleh karena itu, dapat didefinisikan fungsi  $g : B \rightarrow A$  yang *well-defined*. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa  $g$  berupa inversi dari  $f$ , yakni  $g = f^{-1}$ . Misalkan  $a \in A$  dan  $f(a) = b$ . Berlaku  $g(b) = a$ , maka

$$g(f(a)) = g(b) = a.$$

Di sisi lain, misalkan  $b \in B$  dan  $g(b) = a$ . Berlaku  $f(a) = b$ , maka

$$f(g(b)) = f(a) = b.$$

Terbukti  $f(g(b)) = b, \forall b \in B$  dan  $g(f(a)) = a, \forall a \in A$ , maka  $g = f^{-1}$ .

- Jika  $f : A \rightarrow B$  invertibel, maka  $f$  bijektif.

Misalkan  $f : A \rightarrow B$  berupa fungsi invertibel dengan fungsi inversi  $f^{-1} : B \rightarrow A$ . Pertama, dibuktikan bahwa  $f$  surjektif. Misalkan  $b \in B$  dengan  $f^{-1}(b) = a$ .

$$f(a) = f(f^{-1}(b)) = b.$$

Terbukti bahwa untuk sembarang  $b \in B$ , terdapat  $a \in A$  sehingga  $f(a) = b$ . Akibatnya,  $f$  surjektif.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa  $f$  injektif. Misalkan  $a_1, a_2 \in A$  di mana  $f(a_1) = f(a_2)$ . Selanjutnya, ditunjukkan bahwa  $a_1 = a_2$ . Misalkan  $f(a_1) = f(a_2) = b$  dan  $f^{-1}(b) = a$ .

$$a_1 = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(b) = a.$$

Di sisi lain, berlaku juga

$$a_2 = f^{-1}(f(a_2)) = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(b) = a.$$

Dengan demikian, berlaku  $a_1 = a_2$ . Akibatnya,  $f$  injektif.

Karena  $f$  injektif dan surjektif, maka  $f$  bijektif.

□

Selanjutnya, dibuktikan lema berikut.

**Lema 3.13.** Misalkan  $X$  berupa variabel acak kontinu yang terdefinisi pada  $x > 0$  dengan cdf  $F$ , rata-rata  $\mu_X$ , dan cdf *integrated tail distribution*  $F_{X^e}$ . Berlaku  $F_{X^e} : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  berupa fungsi bijektif.

**Bukti.** Berdasarkan Definisi (2.61),

$$F_{X^e}(x) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

$F_{X^e}(x)$  memiliki turunan berikut yang berupa pdf dari  $X^e$ , yaitu

$$f_{X^e}(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\mu_X}$$

dengan  $\bar{F}(x)$  berupa fungsi survival dari  $X$ , yang didefinisikan sebagai

$$\bar{F}(x) = \int_x^\infty f(t) dt = 1 - \int_0^x f(t) dt.$$

Turunan dari  $\bar{F}(x)$  adalah  $-f(x)$ . Untuk variabel acak kontinu yang terdefinisi pada  $x > 0$ , berlaku  $f(x) > 0, \forall x > 0$ , sehingga  $-f(x) < 0$ . Akibatnya,  $\bar{F}(x)$  berupa fungsi turun tegas. Oleh karena itu, untuk  $0 < x_1 < x_2$ , berlaku  $f_{X^e}(x_1) > f_{X^e}(x_2)$ . Di sisi lain, berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \bar{F}(x) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Karena  $\mu_X$  berupa suatu konstanta positif, maka berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_{X^e}(x) &= \frac{1}{\mu_X}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f_{X^e}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Karena  $f_{X^e}$  turun tegas dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{X^e}(x) = 0$ , maka  $f_{X^e}(x) > 0, \forall x > 0$ . Akibatnya,  $F_{X^e}(x)$  naik tegas, yakni untuk sembarang  $x_1, x_2$  dengan  $0 < x_1 < x_2$ , berlaku  $F_{X^e}(x_1) < F_{X^e}(x_2)$ . Dengan demikian,  $F_{X^e}$  berupa fungsi injektif.

Perhatikan kedua limit berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F_{X^e}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_X} \int_0^0 \bar{F}(y) dy = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X^e}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_X} \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = 1. \end{aligned}$$

Berlaku  $\lim_{x \rightarrow 0} F_{X^e}(x) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{X^e}(x) = 1$ . Selain itu,  $f_{X^e}(x)$  berupa fungsi kontinu karena  $X$  berupa variabel acak kontinu. Akibatnya,  $F_{X^e}(x)$  berupa fungsi

kontinu. Dengan teorema nilai antara/*intermediate value theorem* (Aguilar, 2022, p. 170), untuk semua  $p \in (0, 1)$ , terdapat  $x \in (0, \infty)$  sedemikian sehingga  $F_{X^e}(x) = p$ . Dengan demikian,  $F_{X^e}(x)$  berupa fungsi surjektif.

Karena  $F_{X^e}(x)$  berupa fungsi injektif dan surjektif, maka  $F_{X^e}(x)$  berupa fungsi bijektif.  $\square$

Dengan Lema 3.12,  $F_{X^e}(x)$  invertibel dan  $F_{X^e}^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$  *well-defined*.

Distribusi severitas klaim yang disimulasikan adalah distribusi eksponensial, Weibull, dan Lomax.

### 3.3.1 Distribusi Eksponensial

Diketahui bahwa  $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$  (2.30), maka  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\beta x}$ . Cdf dari *integrated tail distribution*-nya adalah

$$\begin{aligned} F_{X^e}(x) &= \beta \int_0^x e^{-\beta t} dt \\ &= \beta \left[ -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\beta x}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dapat dilihat bahwa  $F_{X^e}(x) = F(x) = 1 - e^{-\beta x}$ . Misalkan  $y = F_{X^e}(x)$  dan  $F_{X^e}^{-1}(y) = x$ .

$$\begin{aligned} F_{X^e}(x) &= 1 - e^{-\beta x} \\ \Leftrightarrow y &= 1 - e^{-\beta F_{X^e}^{-1}(y)} \\ \Leftrightarrow 1 - y &= e^{-\beta F_{X^e}^{-1}(y)} \\ \Leftrightarrow -\ln(1 - y) &= \beta F_{X^e}^{-1}(y) \\ \Leftrightarrow F_{X^e}^{-1}(y) &= -\frac{\ln(1 - y)}{\beta} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dengan *inverse transformation method* (2.8), nilai *integrated tail distribution* dari eksponensial dapat dihasilkan dengan fungsi  $g(y) = F_{X^e}^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\beta}$ , dengan  $y \in (0, 1)$ .

### 3.3.2 Distribusi Weibull

Diketahui bahwa  $F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]$  (2.36), maka  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]$ . Cdf dari *integrated tail distribution*-nya adalah

$$F_{Xe}(x) = \frac{\int_0^x \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right] dt}{\lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}. \quad (3.38)$$

Lakukan substitusi variabel  $u = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k$ , sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{kt^{k-1}}{\lambda^k} = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} = \frac{k}{\lambda} u^{\frac{k-1}{k}}, \\ t = 0 &\longrightarrow u = 0, \\ t = x &\longrightarrow u = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dengan substitusi (3.39) ke persamaan (3.38), diperoleh

$$\begin{aligned} F_{Xe}(x) &= \frac{\int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \frac{\lambda}{k} u^{\frac{1-k}{k}} e^{-u} du}{\lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{k} \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} u^{\frac{1}{k}-1} e^{-u} du}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{k} \gamma\left(\frac{1}{k}, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dengan persamaan (??), berlaku:

$$\frac{\frac{1}{k}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}. \quad (3.41)$$

Substitusi (3.41) ke persamaan (3.40)

$$F_{Xe}(x) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{k}, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}. \quad (3.42)$$

Misalkan  $y = F_{X^e}(x)$  dan  $F_{X^e}^{-1}(y) = x$ . Dengan persamaan (2.5), maka

$$\begin{aligned} y &= \frac{\gamma\left(\frac{1}{k}, \left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} \\ &= P\left(\frac{1}{k}, \left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k\right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Karena  $k$  berupa konstanta, maka  $P$  dapat ditulis sebagai fungsi satu variabel,

$$P\left(\frac{1}{k}, \left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k\right) = P\left(\left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k\right)$$

di mana

$$P(z) = \frac{1}{\Gamma(y)} \int_0^z t^{y-1} e^{-t} dt.$$

$P$  berupa cdf *integrated tail distribution*, maka dengan Lema 3.13,  $P$  invertibel dengan fungsi inversi  $P^{-1}$ . Untuk mengaproksimasi nilai  $x$ , diketahui nilai dari  $y = P(x) \rightarrow x = P^{-1}(y)$ , digunakan metode numerik. Aproksimasi nilai  $x$  dilakukan dengan metode pencarian akar dari suatu fungsi menggunakan metode regula falsi (2.9). Berikut adalah prosedurnya:

1. Dengan metode quasi-Monte Carlo (2.15.3), diperoleh suatu nilai  $y$  yang diambil dari barisan *low-discrepancy*, di mana nilai tersebut berada pada interval  $(0, 1)$ .
2. Definisikan suatu fungsi baru  $G(x) = P(x) - y$ , sehingga akar dari  $G(x)$  berupa nilai yang dicari.
3. Akar dari  $G(x)$  dicari dengan metode regula falsi.

Dengan demikian, berlaku:

$$\begin{aligned} y &= P\left(\left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda}\right)^k &= P^{-1}(y) \\ \Leftrightarrow \frac{F_{X^e}^{-1}(y)}{\lambda} &= (P^{-1}(y))^{\frac{1}{k}} \\ \Leftrightarrow F_{X^e}^{-1}(y) &= \lambda(P^{-1}(y))^{\frac{1}{k}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dengan *inverse transformation method* (2.8), nilai *integrated tail distribution* dari Weibull dapat dihasilkan dengan fungsi  $g(y) = F_{X^e}^{-1}(y) = \lambda(P^{-1}(y))^{\frac{1}{k}}$ , dengan  $y \in (0, 1)$ .

### 3.3.3 Distribusi Lomax

Diketahui bahwa  $F(x) = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^\alpha}$  (2.49), maka  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^\alpha}$ . *Integrated tail distribution* dari distribusi Lomax hanya ada ketika  $\alpha > 1$  karena momen pertamanya ada untuk  $\alpha > 1$ . Cdf dari *integrated tail distribution*-nya adalah

$$F_{X^e}(x) = \frac{\int_0^x \frac{\lambda^\alpha}{(t+\lambda)^\alpha} dt}{\frac{\lambda}{\alpha-1}} = \frac{\lambda^\alpha \int_0^x \frac{1}{(t+\lambda)^\alpha} dt}{\frac{\lambda}{\alpha-1}}. \quad (3.45)$$

Lakukan substitusi variabel  $u = t + \lambda$ , sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 1, \\ t = 0 &\longrightarrow u = \lambda, \\ t = x &\longrightarrow u = x + \lambda. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dengan substitusi (3.46) ke persamaan (3.45), diperoleh

$$\begin{aligned} F_{X^e}(x) &= \frac{\lambda^\alpha \int_\lambda^{x+\lambda} \frac{1}{u^\alpha} du}{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \\ &= \frac{\lambda^\alpha \left[ \frac{1}{(-\alpha+1)(u^{\alpha-1})} \right]_\lambda^{x+\lambda}}{\frac{\lambda}{\alpha-1}} \\ &= -\lambda^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{(x+\lambda)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}} \right] \\ &= 1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(x+\lambda)^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dapat dilihat bahwa jika  $X$  berdistribusi Lomax dengan parameter  $\alpha$  dan  $\lambda$ , maka *integrated tail distribution*-nya berdistribusi Lomax dengan parameter  $\alpha - 1$  dan  $\lambda$ . Misalkan  $y = F_{X^e}(x)$  dan  $F_{X^e}^{-1}(y) = x$ , maka

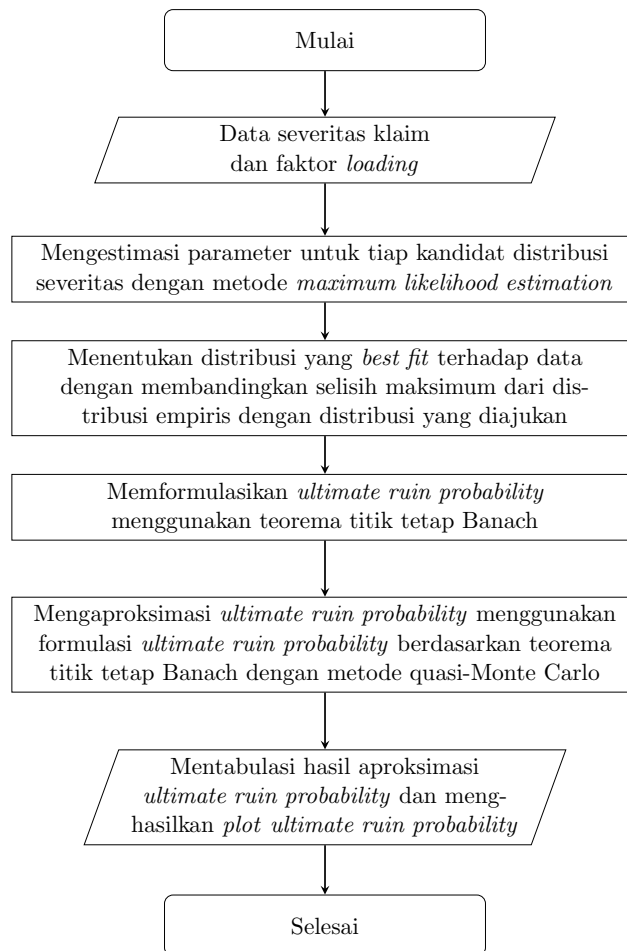
$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(F_{X^e}^{-1}(y) + \lambda)^{\alpha-1}} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{\lambda}{F_{X^e}^{-1}(y) + \lambda} \right)^{\alpha-1} &= 1 - y \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda}{F_{X^e}^{-1}(y) + \lambda} &= (1 - y)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \Leftrightarrow F_{X^e}^{-1}(y) &= \frac{\lambda}{(1 - y)^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \lambda \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dengan *inverse transformation method* (2.8), nilai *integrated tail distribution* dari Lomax dapat dihasilkan dengan fungsi  $g(y) = F_{X^e}^{-1}(y) = \frac{\lambda}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \lambda$ , dengan  $y \in (0, 1)$ .

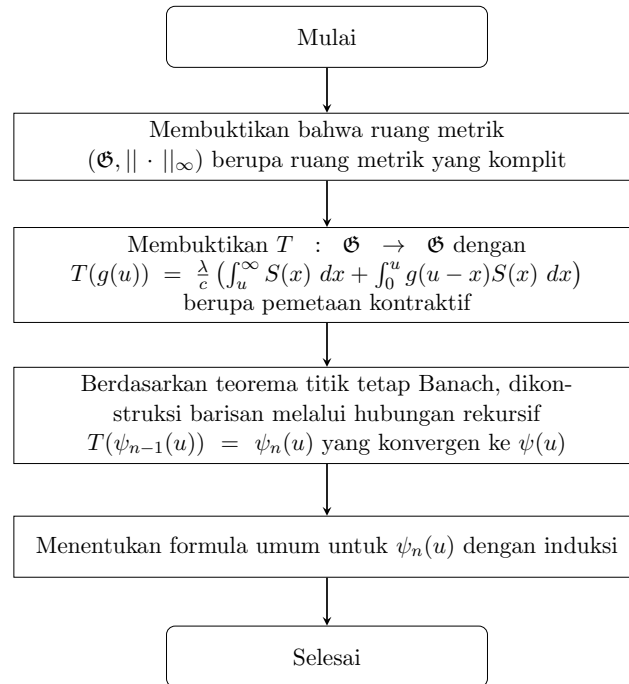
**BAB 4**  
**ANALISIS APROKSIMASI NUMERIK *ULTIMATE RUIN***  
***PROBABILITY***

Pada Bab 3, dengan memanfaatkan teorema titik tetap Banach, diperoleh barisan  $(\psi_n(u))$  yang konvergen ke  $\psi(u)$ , serta metode quasi-Monte Carlo yang digunakan untuk mengaproksimasi suku ke- $k$  pada barisan  $(\psi_n(u))$ . Pada bab ini, dilakukan simulasi numerik dengan metode yang diajukan pada subbab 3.2 untuk distribusi severitas klaim yang telah dipaparkan pada subbab 3.3. Selain itu, analisis dilakukan pada pengaruh distribusi severitas dan parameter yang berbeda terhadap *ultimate ruin probability*. Selanjutnya, dilakukan aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan data klaim, serta membandingkan hasil aproksimasi menggunakan metode yang diajukan dengan aproksimasi Pollaczek-Khinchine (2.12.5).

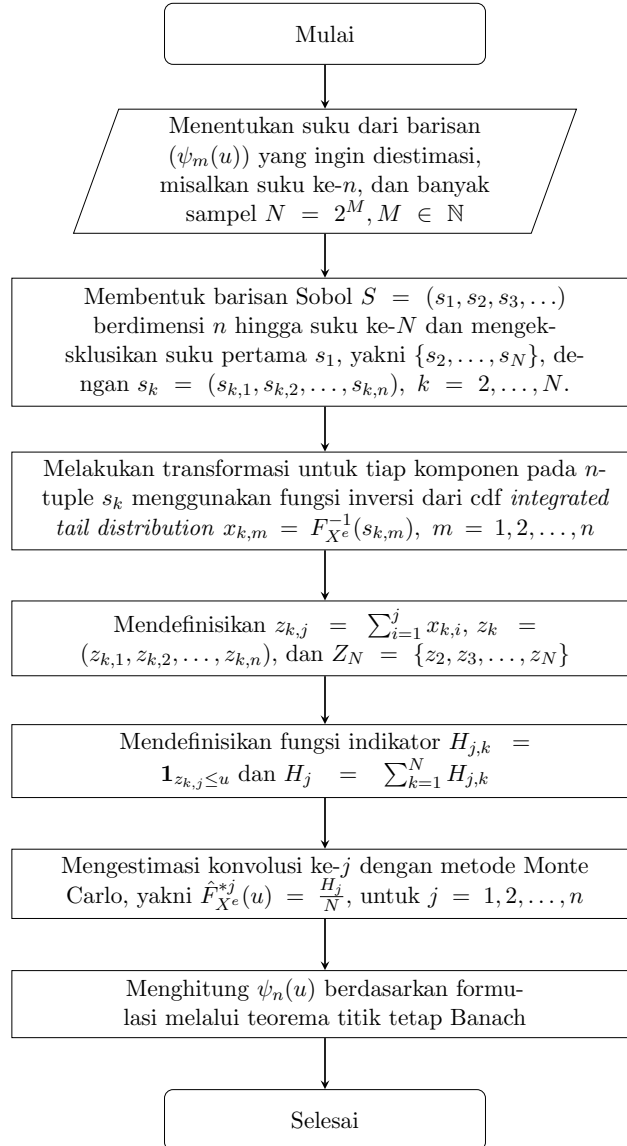
Berikut adalah *flowchart* untuk mengaproksimasi *ultimate ruin probability* dengan memanfaatkan teorema titik tetap Banach dan quasi-Monte Carlo.



Gambar 4.1: *Flowchart* Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability*



Gambar 4.2: *Flowchart* Formulasi *Ultimate Ruin Probability* Berdasarkan Teorema Titik Tetap Banach



Gambar 4.3: *Flowchart* Metode Quasi-Monte Carlo untuk Mengaproksimasi *Ultimate Ruin Probability*

#### 4.1 Simulasi Aproksimasi Numerik *Ultimate Ruin Probability* dengan Formulasi Teorema Titik Tetap Banach dan Metode Quasi-Monte Carlo

Pada bagian ini, dilakukan simulasi aproksimasi numerik untuk mencari *ultimate ruin probability* dengan formulasi teorema titik tetap Banach dan metode quasi-Monte Carlo terhadap distribusi severitas eksponensial, Weibull, dan Lomax. Untuk semua distribusi, *ultimate ruin probability* dihitung untuk nilai *capital* awal 0 hingga 1.000.000. Untuk penyajian dalam tabel, nilai *capital* awal yang digunakan adalah 500, 1.000, 5.000, 10.000, 20.000, 50.000, dan 100.000. Parameter faktor *loading*  $\theta$  yang digunakan adalah 0,1, 0,3, dan 0,5. Alasan menggunakan tiga nilai  $\theta$  adalah untuk membandingkan efek kenaikan faktor *loading* terhadap *ultimate ruin probability*. Berdasarkan Proposisi (3.8),

nilai awal  $\psi_0(u)$  yang digunakan untuk semua kasus adalah  $\frac{1}{1+\theta}$ . Untuk semua aproksimasi, banyaknya sampel yang digunakan adalah  $2^{18} - 1 = 262.143$  dan iterasinya sebanyak 100 ( $\psi_{100}(u)$ ).

#### 4.1.1 Distribusi Eksponensial

Berdasarkan (2.30), pdf dari distribusi eksponensial adalah

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}.$$

Parameter yang digunakan adalah  $\beta = \frac{1}{750}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{1.500}$ . Tabel 4.1 menampilkan karakteristik dari tiap distribusi untuk parameter yang berbeda-beda.

Tabel 4.1: Karakteristik dari Distribusi Severitas Klaim Eksponensial untuk Tiap Parameter

$\beta$	Rata-Rata	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\frac{1}{750}$	750	$5,625 \times 10^5$	2	6
$\frac{1}{1.000}$	1000	$10^6$	2	6
$\frac{1}{1.500}$	1500	$2,25 \times 10^6$	2	6

Karena *ultimate ruin probability* ketika severitas klaim berdistribusi eksponensial memiliki formula eksplisit, maka khusus untuk severitas eksponensial, aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan formulasi teorema titik tetap Banach dan metode quasi-Monte Carlo dibandingkan dengan nilai aktualnya. Error dilihat berdasarkan AE (*absolute error*) yang memiliki definisi

$$AE = |\psi_n(u) - \psi(u)|, \quad (4.1)$$

(Burden & Faires, 2010)

dengan  $\psi_n(u)$  berupa aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan formula (3.8), dengan  $F_{X^e}^{*k}(u)$  diaproksimasi dengan metode yang dielaborasi pada Subbab 3.2.

$$\psi_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta} - \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}^{*n}(u) - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_{X^e}^{*k}(u) & , n \geq 2 \\ \frac{1}{1+\theta} - \left(\frac{1}{1+\theta}\right) (1 - \psi_0(u)) F_{X^e}(u) & , n = 1 \end{cases}$$

*Ultimate ruin probability* aktual  $\psi(u)$  diperoleh dengan menggunakan formula (3.22), yaitu

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1+\theta}\right).$$

Selanjutnya, dihitung aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk tiap parameter yang berbeda.

1.  $\text{Exp}\left(\frac{1}{750}\right)$ 

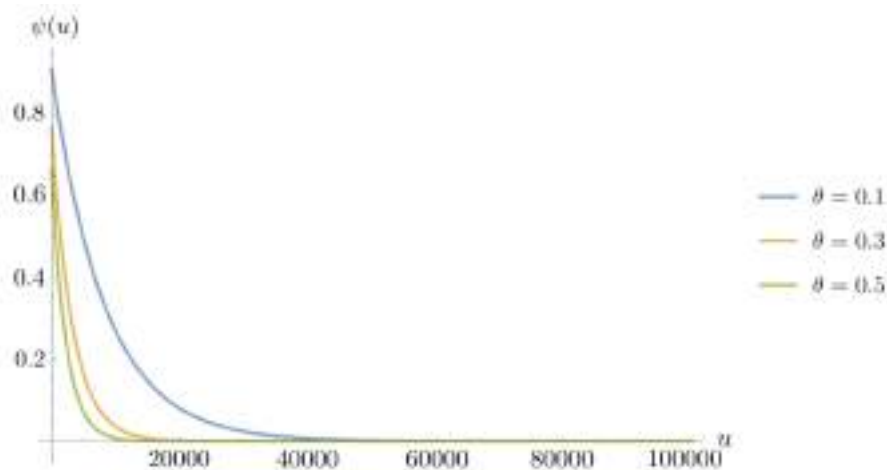
Dengan menggunakan formula (3.8) dan (3.22), Tabel 4.2 menampilkan *ultimate ruin probability* aktual dan aproksimasinya  $\psi_{100}(u)$  untuk beberapa nilai *capital* awal  $u$  yang berbeda.

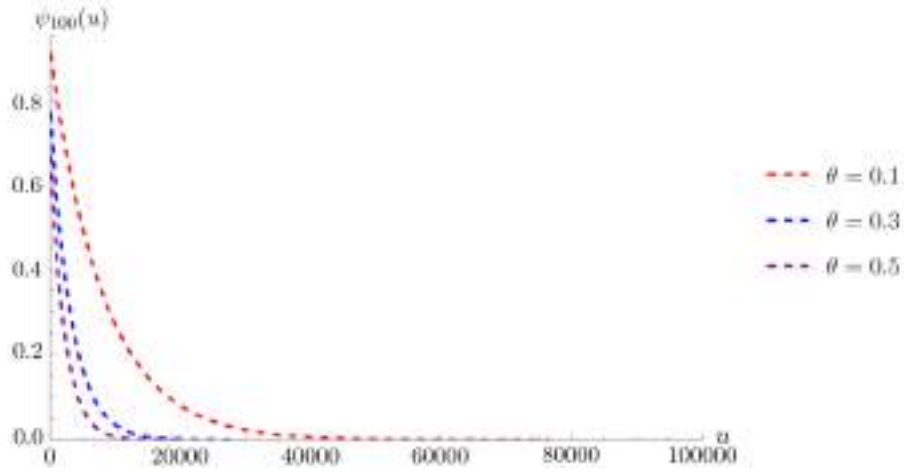
Tabel 4.2: *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim  $\text{Exp}\left(\frac{1}{750}\right)$ 

$u$	$\theta = 0,1$			$\theta = 0,3$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,855631	0,855627	$4 \times 10^{-6}$	0,659541	0,659535	$6 \times 10^{-6}$
1.000	0,805315	0,805328	$1,3 \times 10^{-5}$	0,565493	0,565514	$2,1 \times 10^{-5}$
5.000	0,495905	0,495887	$1,8 \times 10^{-5}$	0,165162	0,165151	$1,1 \times 10^{-5}$
10.000	0,270514	0,270427	$8,7 \times 10^{-5}$	0,035462	0,035465	$3,2 \times 10^{-6}$
20.000	0,080496	0,080516	$2,03 \times 10^{-5}$	0,001635	0,001621	$1,36 \times 10^{-5}$
50.000	0,002121	0,002111	$1,02 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-7}$	$1,42 \times 10^{-7}$	$1,78 \times 10^{-8}$
100.000	$4,95 \times 10^{-6}$	$6,60 \times 10^{-5}$	$6,10 \times 10^{-5}$	$3,34 \times 10^{-14}$	$3,11 \times 10^{-12}$	$3,07 \times 10^{-12}$

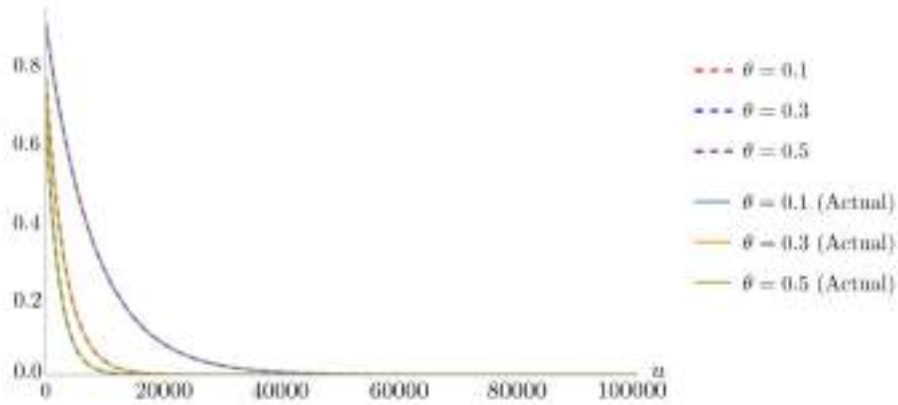
$u$	$\theta = 0,5$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,533825	0,533819	$6 \times 10^{-6}$
1.000	0,427454	0,427472	$1,8 \times 10^{-5}$
5.000	0,072245	0,072236	$8,9 \times 10^{-6}$
10.000	0,007829	0,007855	$2,64 \times 10^{-5}$
20.000	$9,19 \times 10^{-5}$	$8,69 \times 10^{-5}$	$5,09 \times 10^{-6}$
50.000	$1,49 \times 10^{-10}$	$9,66 \times 10^{-11}$	$5,23 \times 10^{-11}$
100.000	$3,33 \times 10^{-20}$	$1,11 \times 10^{-16}$	$1,11 \times 10^{-16}$

Berikut adalah grafik yang menunjukkan *ultimate ruin probability* aktual, serta aproksimasinya dengan *capital* awal  $u$  bernilai 0 hingga 100.000.

Gambar 4.4: Plot *Ultimate Ruin Probability* Aktual untuk  $\text{Exp}\left(\frac{1}{750}\right)$



Gambar 4.5: Plot Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Exp}(\frac{1}{750})$



Gambar 4.6: Plot *Ultimate Ruin Probability* Gabungan untuk  $\text{Exp}(\frac{1}{750})$

2.  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1.000}\right)$ 

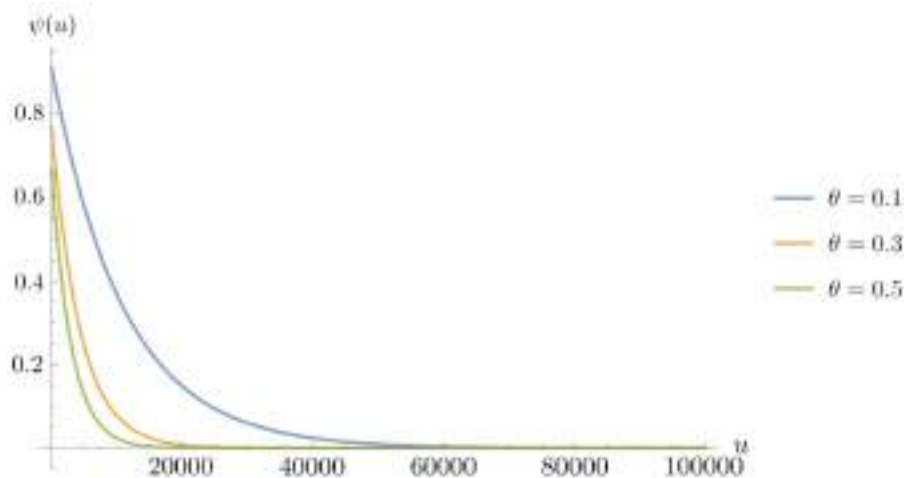
Dengan menggunakan formula (3.8) dan (3.22), Tabel 4.3 menampilkan *ultimate ruin probability* aktual dan aproksimasinya  $\psi_{100}(u)$  untuk beberapa nilai *capital* awal  $u$  yang berbeda.

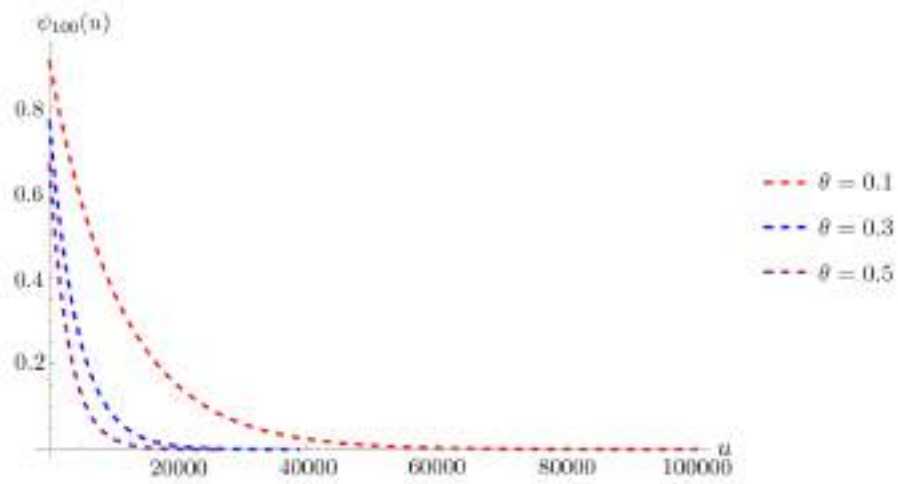
Tabel 4.3: *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1.000}\right)$ 

$u$	$\theta = 0,1$			$\theta = 0,3$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,868694	0,868692	$2 \times 10^{-6}$	0,685403	0,685400	$3 \times 10^{-6}$
1.000	0,830092	0,830101	$9 \times 10^{-6}$	0,610710	0,610725	$1,5 \times 10^{-5}$
5.000	0,577033	0,577057	$2,4 \times 10^{-5}$	0,242632	0,242664	$3,2 \times 10^{-5}$
10.000	0,366264	0,366272	$8 \times 10^{-6}$	0,076531	0,076471	$6,03 \times 10^{-5}$
20.000	0,147564	0,147616	$5,2 \times 10^{-5}$	0,007614	0,007629	$1,49 \times 10^{-5}$
50.000	0,009650	0,009632	$1,86 \times 10^{-5}$	$7,50 \times 10^{-6}$	$7,02 \times 10^{-6}$	$4,81 \times 10^{-7}$
100.000	$1,02 \times 10^{-4}$	$1,02 \times 10^{-4}$	$1,38 \times 10^{-5}$	$7,31 \times 10^{-11}$	$6,10 \times 10^{-11}$	$1,28 \times 10^{-11}$

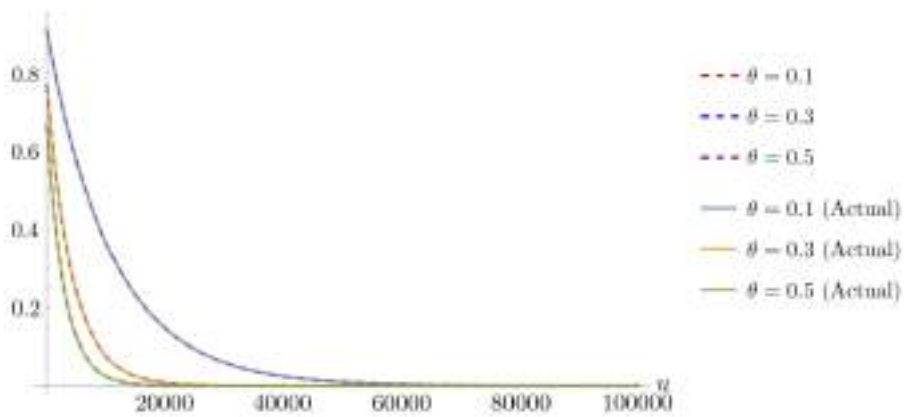
$u$	$\theta = 0,5$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,564321	0,564318	$3 \times 10^{-6}$
1.000	0,477688	0,477703	$1,5 \times 10^{-5}$
5.000	0,125917	0,125944	$2,7 \times 10^{-5}$
10.000	0,023783	0,023730	$5,25 \times 10^{-5}$
20.000	$8,48 \times 10^{-4}$	$8,42 \times 10^{-4}$	$6,43 \times 10^{-6}$
50.000	$3,85 \times 10^{-8}$	$2,95 \times 10^{-8}$	$9,04 \times 10^{-9}$
100.000	$2,23 \times 10^{-15}$	$8,88 \times 10^{-16}$	$1,34 \times 10^{-15}$

Berikut adalah grafik yang menunjukkan *ultimate ruin probability* aktual, serta aproksimasinya dengan *capital* awal  $u$  bernilai 0 hingga 100.000.

Gambar 4.7: Plot *Ultimate Ruin Probability* Aktual untuk  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1.000}\right)$



Gambar 4.8: Plot Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$



Gambar 4.9: Plot *Ultimate Ruin Probability* Gabungan untuk  $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$

3.  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1500}\right)$ 

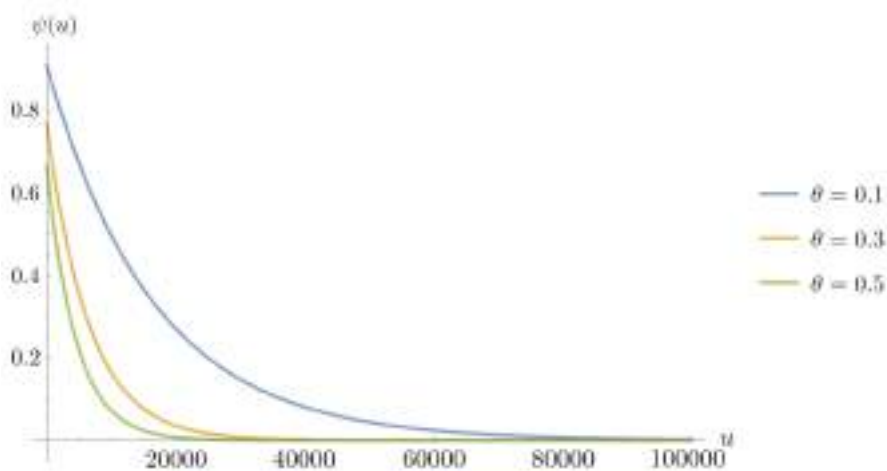
Dengan menggunakan formula (3.8) dan (3.22), Tabel 4.4 menampilkan *ultimate ruin probability* aktual dan aproksimasinya  $\psi_{100}(u)$  untuk beberapa nilai *capital* awal  $u$  yang berbeda.

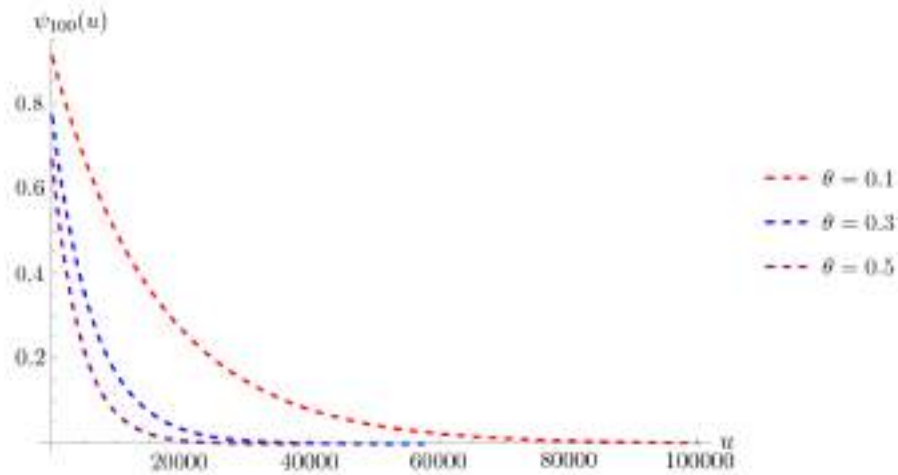
Tabel 4.4: *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1500}\right)$ 

$u$	$\theta = 0,1$			$\theta = 0,3$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,881956	0,881953	$3 \times 10^{-6}$	0,712278	0,712274	$4 \times 10^{-6}$
1.000	0,855631	0,855627	$4 \times 10^{-6}$	0,659541	0,659535	$6 \times 10^{-6}$
5.000	0,671433	0,671446	$1,3 \times 10^{-5}$	0,356438	0,356447	$9 \times 10^{-6}$
10.000	0,495905	0,495887	$1,8 \times 10^{-5}$	0,165162	0,165151	$1,1 \times 10^{-5}$
20.000	0,270514	0,270427	$8,7 \times 10^{-5}$	0,035462	0,035465	$3,24 \times 10^{-6}$
50.000	0,043910	0,043917	$7,4 \times 10^{-6}$	$3,51 \times 10^{-4}$	$3,43 \times 10^{-4}$	$7,64 \times 10^{-6}$
100.000	0,002121	0,002111	$1,05 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-7}$	$1,42 \times 10^{-7}$	$1,78 \times 10^{-8}$

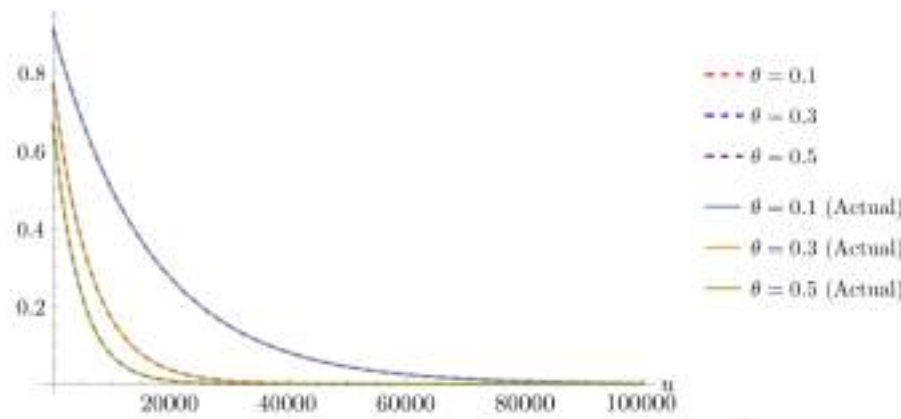
$u$	$\theta = 0,5$		
	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	AE
500	0,596560	0,596557	$3 \times 10^{-6}$
1.000	0,533825	0,533819	$6 \times 10^{-6}$
5.000	0,219462	0,219464	$2 \times 10^{-6}$
10.000	0,072245	0,072236	$8,9 \times 10^{-6}$
20.000	0,007829	0,007855	$2,64 \times 10^{-5}$
50.000	$9,96 \times 10^{-6}$	$8,90 \times 10^{-6}$	$1,07 \times 10^{-6}$
100.000	$1,49 \times 10^{-10}$	$9,66 \times 10^{-11}$	$5,23 \times 10^{-11}$

Berikut adalah grafik yang menunjukkan *ultimate ruin probability* aktual, serta aproksimasinya dengan *capital* awal  $u$  bernilai 0 hingga 100.000.

Gambar 4.10: Plot *Ultimate Ruin Probability* Aktual untuk  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1500}\right)$



Gambar 4.11: Plot Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1500}\right)$



Gambar 4.12: Plot *Ultimate Ruin Probability* Gabungan untuk  $\text{Exp}\left(\frac{1}{1500}\right)$

Berdasarkan plot *ultimate ruin probability* aktual dan hasil aproksimasi pada Gambar 4.6, 4.9, dan 4.12, dapat dilihat bahwa grafik *ultimate ruin probability* dari hasil aproksimasi tidak memiliki perbedaan yang signifikan dibandingkan grafik *ultimate ruin probability* aktual untuk semua parameter dan faktor *loading*. Hal ini juga dapat dilihat dari Tabel 4.2, 4.3, dan 4.4, AE pada seluruh kasus bernilai kurang dari  $10^{-4}$ .

#### 4.1.2 Distribusi Weibull

Berdasarkan (2.36), pdf dari distribusi Weibull adalah

$$f(x) = \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right].$$

Parameter yang digunakan (dinyatakan dalam  $(\lambda, k)$ ) adalah  $\left(\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(500, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}\right)$ , dan  $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$ . Semua pasang parameter menyebabkan distribusinya memi-

liki rata-rata 1.000. Tabel 4.5 menampilkan karakteristik dari distribusi severitas klaim untuk tiap pasang parameter.

Tabel 4.5: Karakteristik dari Distribusi Severitas Weibull untuk Tiap Pasang Parameter

$\lambda$	$k$	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\frac{1.000}{6}$	$\frac{1}{3}$	$1,9 \times 10^7$	19,5607	1.005,5319
500	$\frac{1}{2}$	$5 \times 10^6$	6,4401	87,72
$\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}$	$\frac{4}{3}$	$5,74 \times 10^5$	-3,3029	5,2151
$\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}$	2	$2,73 \times 10^5$	-13,3577	3,2451

Berikut adalah hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk masing-masing distribusi.

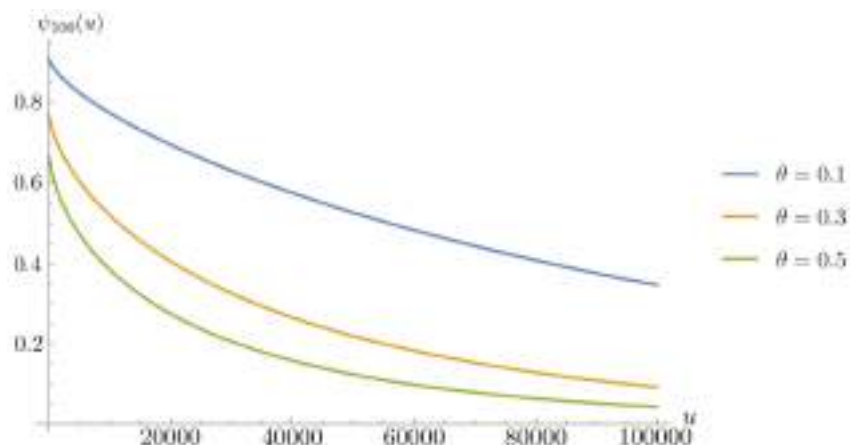
1. Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ )

Tabel 4.6 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ ).

Tabel 4.6: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ )

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,892810	0,734850	0,624157
1.000	0,881934	0,712573	0,597218
5.000	0,825144	0,604848	0,473812
10.000	0,774770	0,520198	0,384683
20.000	0,695748	0,405216	0,274521
50.000	0,526672	0,219217	0,123635
100.000	0,346083	0,092171	0,042597

Gambar 4.13 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.13: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ )

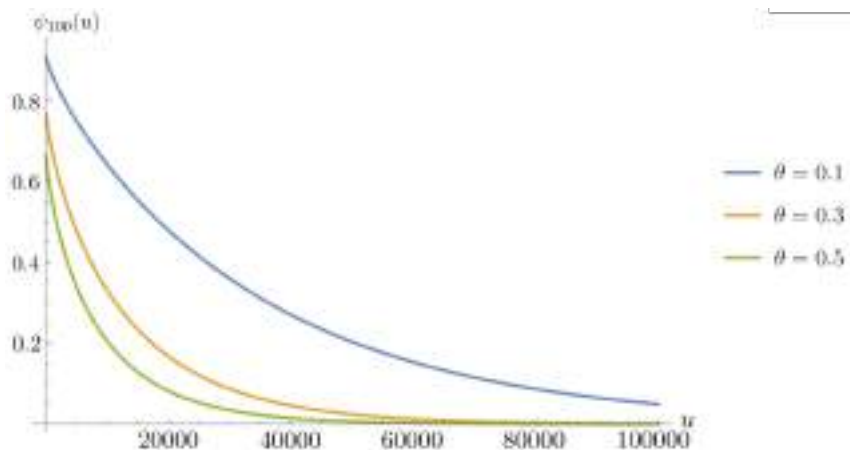
2. Weibull( $500, \frac{1}{2}$ )

Tabel 4.7 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Weibull( $500, \frac{1}{2}$ ).

Tabel 4.7: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull( $500, \frac{1}{2}$ )

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,883526	0,715672	0,600824
1.000	0,864120	0,676867	0,554713
5.000	0,750737	0,479347	0,341366
10.000	0,643355	0,331846	0,20598
20.000	0,479754	0,167886	0,082555
50.000	0,203641	0,024484	0,006871
100.000	0,049510	0,001129	$1,59 \times 10^{-4}$

Gambar 4.14 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.14: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk Weibull( $500, \frac{1}{2}$ )

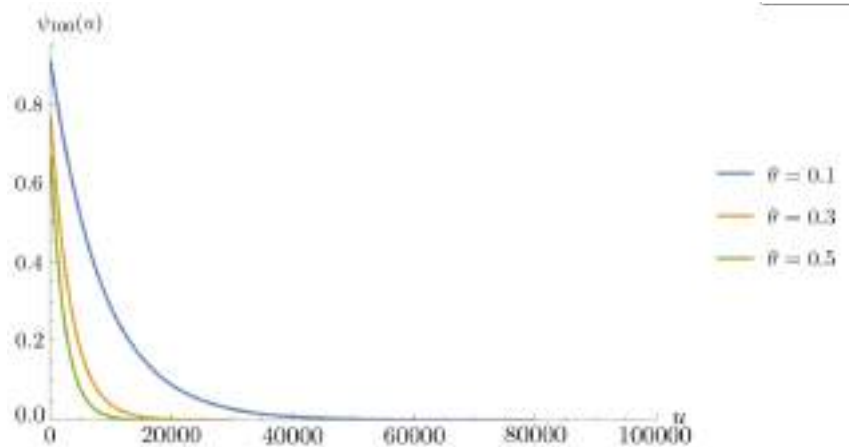
3. Weibull( $\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}$ )

Tabel 4.8 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Weibull( $\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}$ ).

Tabel 4.8: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull  $\left(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}\right)$

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,864223	0,676298	0,553359
1.000	0,817415	0,586427	0,449728
5.000	0,512859	0,175586	0,076562
10.000	0,286007	0,038705	0,008295
20.000	0,088917	0,001879	$9,73 \times 10^{-5}$
50.000	0,002673	$2,16 \times 10^{-7}$	$1,63 \times 10^{-10}$
100.000	$6,60 \times 10^{-5}$	$3,11 \times 10^{-12}$	$1,11 \times 10^{-16}$

Gambar 4.15 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.15: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk Weibull  $\left(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}\right)$

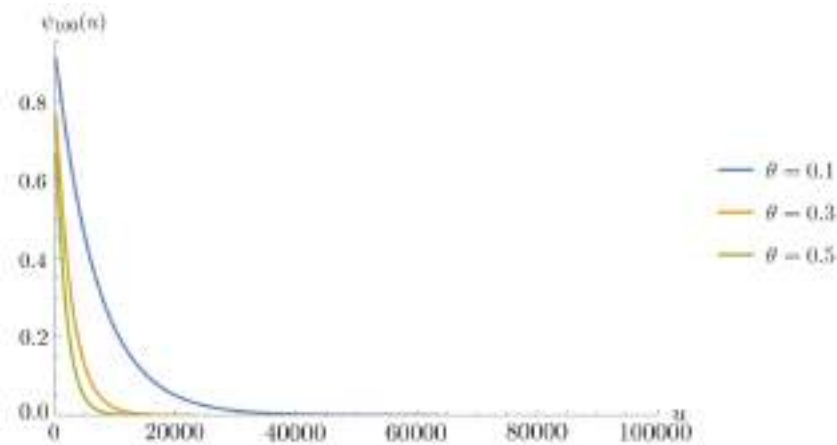
4. Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$ 

Tabel 4.9 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$ .

Tabel 4.9: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,860004	0,66767	0,54294
1.000	0,802876	0,558581	0,417672
5.000	0,448004	0,120274	0,042362
10.000	0,216153	0,017657	0,002427
20.000	0,050324	$3,81 \times 10^{-4}$	$7,98 \times 10^{-6}$
50.000	$6,35 \times 10^{-4}$	$3,83 \times 10^{-9}$	$2,87 \times 10^{-13}$
100.000	$6,60 \times 10^{-5}$	$3,10 \times 10^{-12}$	$1,11 \times 10^{-16}$

Gambar 4.16 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.16: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$

Berdasarkan plot *ultimate ruin probability* di atas, dapat dilihat bahwa kenaikan nilai parameter  $k$  menyebabkan penurunan *ultimate ruin probability*. Hal ini karena penurunan nilai parameter  $k$  menyebabkan distribusinya menjadi lebih *heavy-tailed*. Hasil ini bersesuaian dengan kurtosis dari tiap pasang parameter (4.5), di mana kenaikan nilai parameter  $k$  menghasilkan kurtosis yang lebih kecil, sehingga lebih sedikit klaim *outlier* yang bernilai sangat besar.

### 4.1.3 Distribusi Lomax

Berdasarkan (2.49), pdf dari distribusi Lomax adalah

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x + \lambda)^{\alpha+1}}.$$

Parameter yang digunakan (dinyatakan dalam  $(\lambda, \alpha)$ ) adalah  $(250, \frac{5}{4})$ ,  $(1.500, \frac{5}{2})$ ,  $(2.500, \frac{7}{2})$ , dan  $(3.500, \frac{9}{2})$ . Semua pasang parameter menyebabkan distribusinya memiliki rata-rata 1.000. Tabel 4.4 menampilkan karakteristik dari distribusi severitas untuk tiap pasang parameter.

Tabel 4.10: Karakteristik dari Distribusi Severitas Lomax untuk Tiap Pasang Parameter

$\alpha$	$\lambda$	Variansi	Skewness	Kurtosis
250	$\frac{5}{4}$	$\infty$	Undefined	Undefined
1.500	$\frac{5}{2}$	$5 \times 10^6$	$\infty$	Undefined
2.500	$\frac{7}{2}$	$2,33 \times 10^6$	11,2232	$\infty$
3.500	$\frac{9}{2}$	$1,8 \times 10^6$	4,6386	149,4444

Berikut adalah hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk masing-masing distribusi

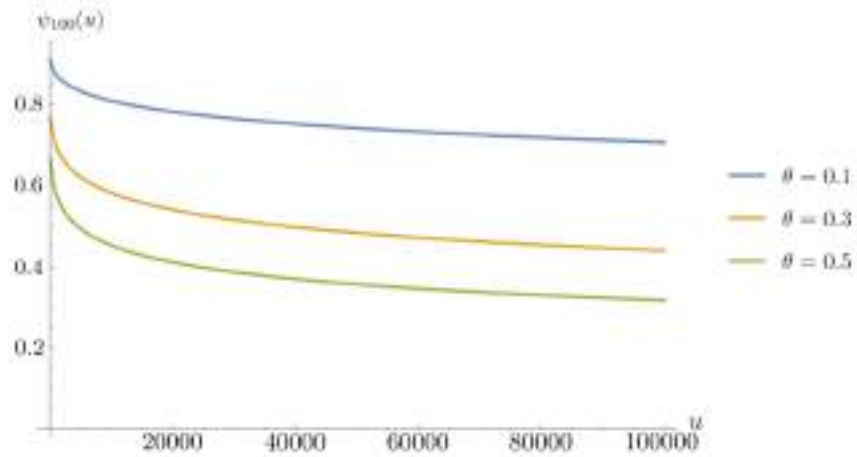
1. Lomax( $250, \frac{5}{4}$ )

Tabel 4.11 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Lomax( $250, \frac{5}{4}$ ).

Tabel 4.11: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $250, \frac{5}{4}$ )

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,885745	0,720366	0,606632
1.000	0,873702	0,69635	0,578149
5.000	0,832744	0,621025	0,493634
10.000	0,809358	0,582083	0,45271
20.000	0,782475	0,540582	0,411043
50.000	0,741801	0,483579	0,356823
100.000	0,707213	0,440022	0,317601

Gambar 4.17 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.17: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Lomax}(250, \frac{5}{4})$

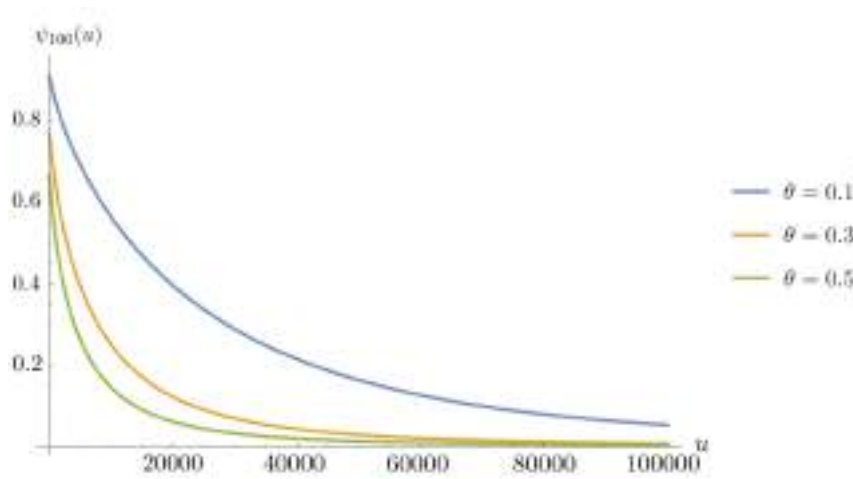
2.  $\text{Lomax}(1.500, \frac{5}{2})$

Tabel 4.12 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim  $\text{Lomax}(1.500, \frac{5}{2})$ .

Tabel 4.12: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim  $\text{Lomax}(1.500, \frac{5}{2})$

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,873527	0,695296	0,576279
1.000	0,844883	0,639533	0,511305
5.000	0,690673	0,394328	0,262152
10.000	0,563420	0,250460	0,145343
20.000	0,395634	0,122458	0,061536
50.000	0,163971	0,0294827	0,013973
100.000	0,052448	0,008316	0,004311

Gambar 4.18 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.18: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk Lomax( $1.500, \frac{5}{2}$ )

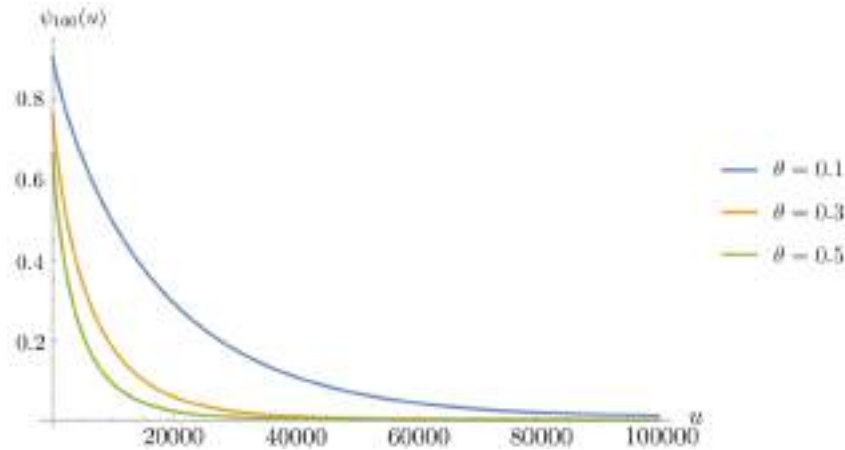
### 3. Lomax( $2.500, \frac{7}{2}$ )

Tabel 4.13 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim Lomax( $2.500, \frac{7}{2}$ ).

Tabel 4.13: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim Lomax( $2.500, \frac{7}{2}$ )

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,871779	0,691716	0,571950
1.000	0,839828	0,629664	0,499778
5.000	0,653945	0,342453	0,213600
10.000	0,494997	0,179988	0,090847
20.000	0,293213	0,058259	0,022564
50.000	0,067668	0,004451	0,001641
100.000	0,007488	$4,54 \times 10^{-4}$	$2,23 \times 10^{-4}$

Gambar 4.19 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.19: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Lomax}(2.500, \frac{7}{2})$

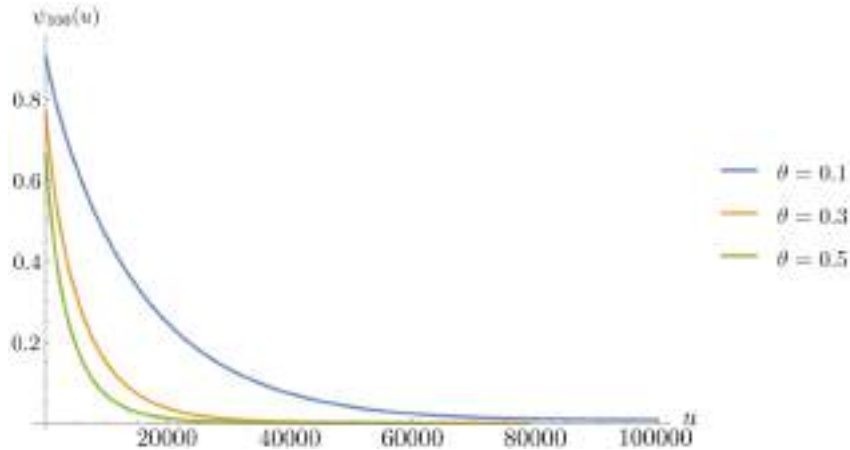
#### 4. $\text{Lomax}(3.500, \frac{9}{2})$

Tabel 4.14 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* untuk severitas klaim  $\text{Lomax}(3.500, \frac{9}{2})$ .

Tabel 4.14: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Klaim  $\text{Lomax}(3.500, \frac{9}{2})$

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
500	0,870957	0,690034	0,569918
1.000	0,837342	0,624818	0,494127
5.000	0,634862	0,316488	0,189963
10.000	0,460416	0,148029	0,067944
20.000	0,246976	0,036222	0,011270
50.000	0,040006	0,001015	$2,70 \times 10^{-4}$
100.000	0,002109	$3,29 \times 10^{-5}$	$1,52 \times 10^{-5}$

Gambar 4.20 menunjukkan grafik aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan *capital* awal  $u$  dari 0 hingga 100.000.



Gambar 4.20: Plot *Ultimate Ruin Probability* untuk  $\text{Lomax}(3.500, \frac{9}{2})$

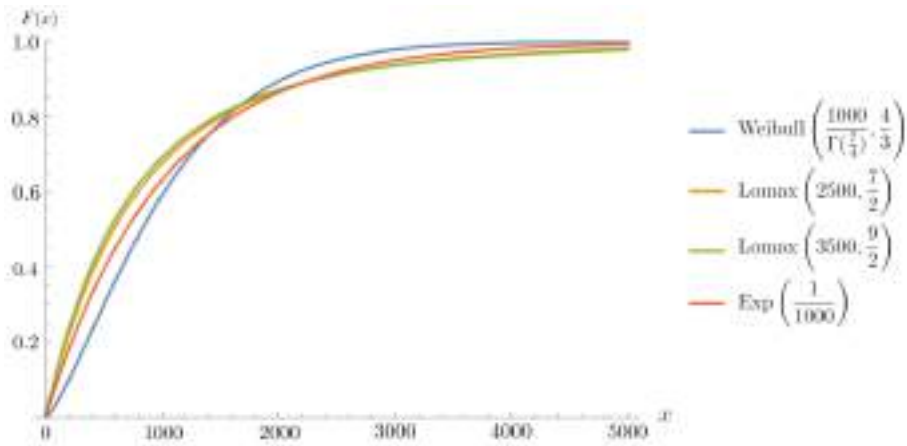
Berdasarkan plot *ultimate ruin probability* di atas, dapat dilihat bahwa kenaikan nilai parameter  $\alpha$  menyebabkan penurunan *ultimate ruin probability*. Hal ini karena kenaikan nilai parameter  $\alpha$  menyebabkan distribusinya menjadi lebih *light-tailed*. Selain itu, dapat juga dilihat variansinya menurun seiring kenaikan nilai  $\alpha$  (4.10). Ketika distribusi severitasnya berupa  $\text{Lomax}(250, \frac{5}{4})$ , variansinya bernilai  $\infty$ . Pada kasus ini, *ultimate ruin probability* bernilai sangat tinggi dibandingkan kasus lainnya.

## 4.2 Perbandingan *Ultimate Ruin Probability*

Pada bagian ini, perbandingan *ultimate ruin probability* dilakukan berdasarkan dua kriteria. Pertama, perbandingan *ultimate ruin probability* dilakukan untuk distribusi severitas dengan pdf atau cdf yang serupa bentuknya. Selanjutnya, perbandingan *ultimate ruin probability* dilakukan berdasarkan distribusi dengan sifat *tail* yang sama (*heavy-thpailed* dan *light-tailed*). Nilai  $\theta$  yang digunakan pada semua kasus adalah 0,3.

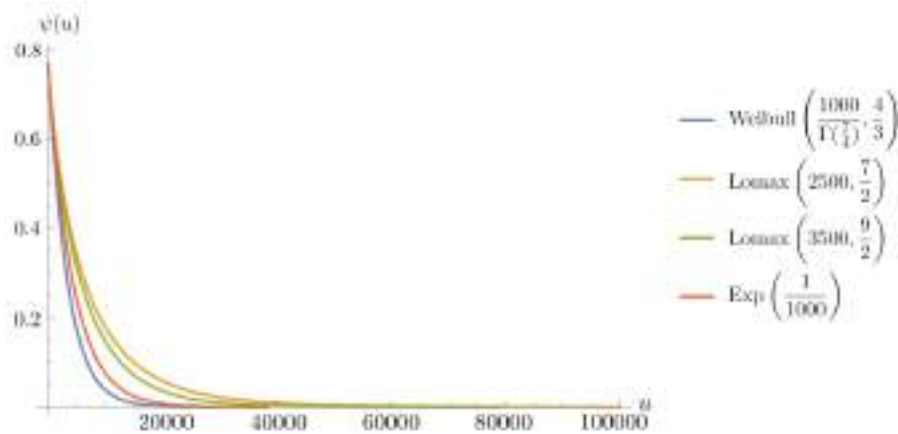
### 4.2.1 Severitas dengan Pdf atau Cdf yang Serupa

Severitas yang memiliki cdf yang serupa adalah Weibull( $\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3}$ ),  $\text{Lomax}(2.500, \frac{7}{2})$ ,  $\text{Lomax}(3.500, \frac{9}{2})$ , dan  $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . Gambar 4.21 menunjukkan perbandingan cdf dari keempat distribusi severitas klaim.



Gambar 4.21: Plot Perbandingan Cdf yang Serupa

Gambar 4.22 menampilkan perbandingan *ultimate ruin probability* untuk severitas yang telah disebutkan.



Gambar 4.22: Plot Perbandingan *Ultimate Ruin Probability* untuk Cdf Severitas yang Serupa

Tabel 4.15 menampilkan karakteristik dari distribusi yang dibandingkan.

Tabel 4.15: Karakteristik dari Distribusi dengan Cdf yang Serupa

Distribusi	Variansi	Skewness	Kurtosis
Weibull $\left(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{1}{4})}, \frac{4}{3}\right)$	$5,74 \times 10^5$	-3,3029	5,2151
Lomax $(2.500, \frac{7}{2})$	$2,33 \times 10^6$	11,2232	$\infty$
Lomax $(3.500, \frac{9}{2})$	$1,8 \times 10^6$	4,6386	149,4444
Exp $(\frac{1}{1.000})$	$10^6$	2	6

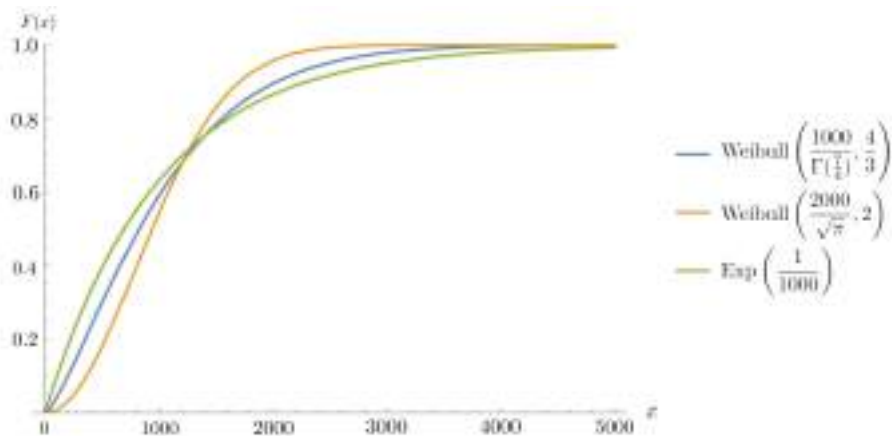
Pada semua kasus, *ultimate ruin probability* mencapai nilai yang sangat kecil ketika  $u$  bernilai 40.000. Karena bentuk cdf yang cukup serupa, fungsi *ultimate ruin probability*

juga memiliki bentuk yang serupa. *Ultimate ruin probability* bernilai tertinggi untuk distribusi severitas Lomax $(2.500, \frac{7}{2})$ , diikuti oleh Lomax $(3.500, \frac{9}{2})$ . Hal ini karena distribusi Lomax berupa distribusi yang *heavy-tailed*. Keduanya juga memiliki variansi dan kurtosis yang lebih tinggi dibanding dua distribusi severitas lainnya. Severitas Weibull $(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3})$  memiliki *ultimate probability ruin* yang paling rendah. Hal ini sesuai dengan karakteristiknya, di mana distribusi Weibull $(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3})$  memiliki variansi dan kurtosis yang paling rendah.

#### 4.2.2 Berdasarkan *Tail* dari Distribusi Severitas

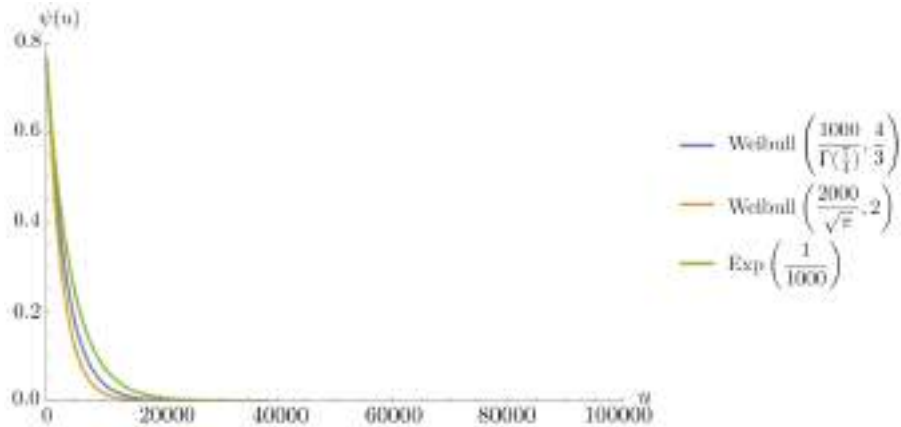
##### 1. Distribusi *light-tailed*

Distribusi *light-tailed* yang dibandingkan antara lain Weibull $(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{7}{4})}, \frac{4}{3})$ , Weibull $(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2)$ , dan  $\text{Exp}(\frac{1}{1.000})$ . Gambar 4.23 menunjukkan cdf dari tiap distribusinya.



Gambar 4.23: Perbandingan Cdf *Light-tailed*

Gambar 4.24 menampilkan perbandingan *ultimate ruin probability* untuk severitas yang telah disebutkan.



Gambar 4.24: Perbandingan *Ultimate Ruin Probability* untuk Severitas *Light-tailed*

Tabel 4.16 menampilkan karakteristik dari distribusi yang dibandingkan.

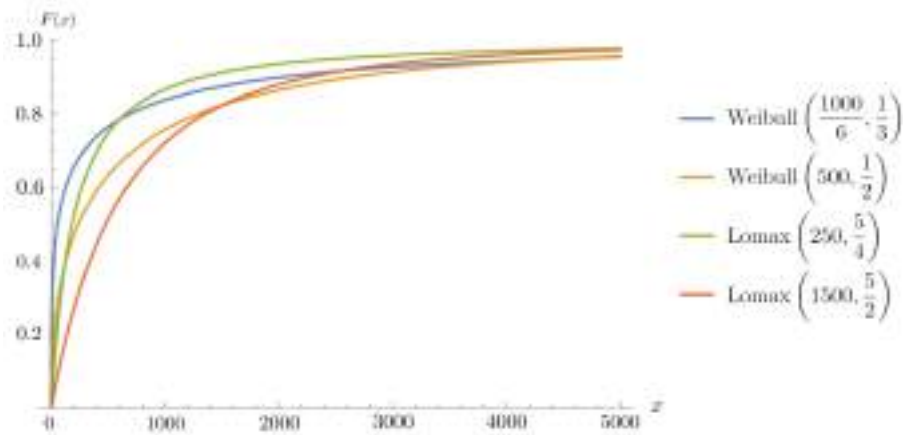
Tabel 4.16: Karakteristik dari Distribusi *Light-tailed*

Distribusi	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
Weibull $\left(\frac{1.000}{\Gamma(\frac{1}{4})}, \frac{4}{3}\right)$	$5,74 \times 10^5$	-3,3029	5,2151
Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$	$2,73 \times 10^5$	-13,3577	3,2451
Exp $\left(\frac{1}{1.000}\right)$	$10^6$	2	6

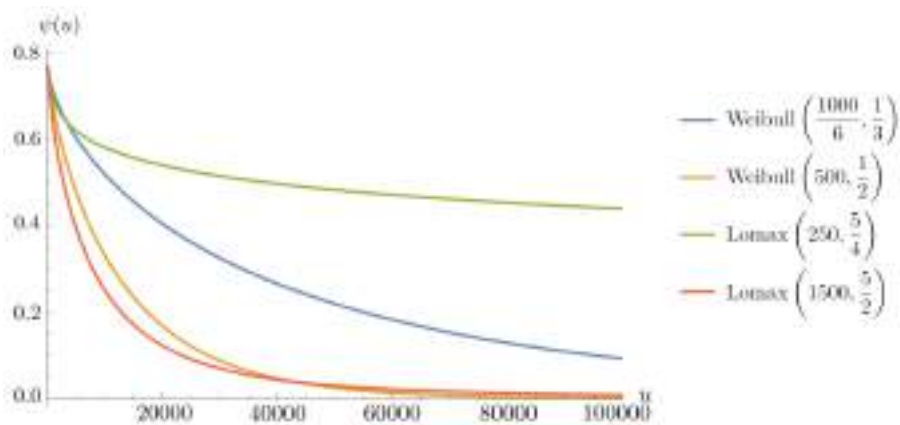
Pada semua kasus, *ultimate ruin probability* mencapai nilai yang sangat kecil ketika  $u$  bernilai 20.000. Fungsi *ultimate ruin probability* memiliki bentuk yang serupa untuk semua kasus. Severitas Weibull $\left(\frac{2.000}{\sqrt{\pi}}, 2\right)$  memiliki *ultimate ruin probability* yang terkecil. Hal ini sesuai dengan variansi dan kurtosisnya yang terkecil dibanding distribusi *light-tailed* lainnya.

## 2. Distribusi *heavy-tailed*

Distribusi *heavy-tailed* yang dibandingkan antara lain Weibull $\left(\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}\right)$ , Weibull $\left(500, \frac{1}{2}\right)$ , Lomax $\left(250, \frac{5}{4}\right)$ , dan Lomax $\left(1.500, \frac{5}{2}\right)$ . Gambar 4.25 menunjukkan cdf dari tiap distribusinya.

Gambar 4.25: Perbandingan Cdf *Heavy-tailed*

Gambar 4.26 menampilkan perbandingan *ultimate ruin probability* untuk severitas yang telah disebutkan.

Gambar 4.26: Perbandingan *Ultimate Ruin Probability* untuk Severitas *Heavy-tailed*

Tabel 4.17 menampilkan karakteristik dari distribusi yang dibandingkan.

Tabel 4.17: Karakteristik dari Distribusi *Heavy-tailed*

Distribusi	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
Weibull( $\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3}$ )	$1,9 \times 10^7$	19,5607	1.005,5319
Weibull( $500, \frac{1}{2}$ )	$5 \times 10^6$	6,4401	87,72
Lomax( $250, \frac{5}{4}$ )	$\infty$	Undefined	Undefined
Lomax( $1.500, \frac{5}{2}$ )	$5 \times 10^6$	$\infty$	Undefined

Pada kasus Weibull( $500, \frac{1}{2}$ ) dan Lomax( $1.500, \frac{5}{2}$ ), *ultimate ruin probability* mencapai nilai yang cukup kecil ketika  $u$  bernilai sekitar 80.000. Untuk nilai  $u$  yang lebih kecil,

*ultimate ruin probability* dari severitas Weibull $(500, \frac{1}{2})$  lebih tinggi. Namun, ketika  $u$  bernilai lebih dari 40.000, *ultimate ruin probability* dari severitas Lomax  $(1.500, \frac{5}{2})$  bernilai lebih tinggi.

Pada kasus Weibull $(\frac{1.000}{6}, \frac{1}{3})$  dan Lomax $(250, \frac{5}{4})$ , *ultimate ruin probability* masih bernilai cukup tinggi, terutama pada kasus Lomax $(250, \frac{5}{4})$ , di mana *ultimate ruin probability* masih bernilai lebih dari 0.4 pada saat  $u = 100.000$ . Hal ini karena distribusi Lomax memiliki *tail* yang lebih tebal ketika  $\alpha$  semakin kecil. Terlebih lagi, variansi dari severitas Lomax $(250, \frac{5}{4})$  bernilai  $\infty$  karena momen nonsentral keduanya bernilai  $\infty$  juga.

### 4.3 Simulasi Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* dengan Data Aktual dan Perbandingan Hasil Aproksimasi

Pada bagian ini, dilakukan aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan menggunakan data yang diperoleh dari *website* Kaggle (<https://www.kaggle.com/datasets/saisatish09/insuranceclaimsdata?select=AutoBi.csv>). Dataset yang digunakan adalah AutoBi (*Automobile Bodily Injury Claims*). Data ini berasal dari Insurance Research Council (IRC), yaitu suatu divisi pada American Institute for Chartered Property Casualty Underwriters and the Insurance Institute of America. Data ini dikumpulkan pada tahun 2002 yang berisi informasi mengenai informasi demografis tentang pihak yang melakukan klaim, keterlibatan pengacara, dan kerugian ekonomi (dalam ribuan), dan beberapa variabel lainnya. Banyaknya sampel pada dataset AutoBi adalah 1.340 sampel. Setelah melakukan aproksimasi *ultimate ruin probability*, hasil aproksimasi dengan menggunakan metode yang diajukan dibandingkan dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine.

#### 4.3.1 Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* Diketahui Data Aktual

Informasi yang digunakan dari dataset ini hanyalah besar klaim yang terjadi, yakni kolom **LOSS**. Frekuensi klaim tidak diperlukan karena premi selalu menyesuaikan frekuensi klaim, yakni  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ , dengan  $\lambda$  adalah laju frekuensi klaim (2.12.1). Karena nilai klaim yang dicantumkan masih dalam satuan ribuan, maka untuk menjadikan klaimnya bernilai eksak, didefinisikan kolom baru **LOSS2** yang diperoleh dengan mengalikan entri dari **LOSS** dengan 1.000.

Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan untuk mengaproksimasi *ultimate ruin probability* berdasarkan data klaim.

1. Melakukan estimasi parameter untuk distribusi eksponensial, Weibull, dan Lomax dengan *maximum likelihood estimation*. Untuk masing-masing distribusi, estimasi

*maximum likelihood* dihitung berdasarkan persamaan (1), (5), dan (9) untuk distribusi eksponensial, Weibull, dan Lomax berturut-turut. Untuk kasus di mana diperlukan aproksimasi numerik, digunakan metode regula falsi (2.9).

2. Dengan faktor *loading*  $\theta = 0, 1, 0, 3, 0, 5$ , diaproksimasi *ultimate ruin probability* untuk tiap distribusi dengan formulasi teorema titik tetap Banach dan metode quasi-Monte Carlo. Nilai yang diaproksimasi adalah  $\psi_{100}(u)$  dengan banyak sampel  $2^{18} - 1 = 262.143$ .

Selanjutnya, dicek distribusi yang *best fit* terhadap data. Hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan formulasi teorema titik tetap Banach dan metode quasi-Monte Carlo dibandingkan dengan aproksimasi via formula Pollaczek-Khinchine dengan metode Monte Carlo (2.12.5).

Tabel 4.18 menampilkan statistika deskriptif dari **LOSS2**.

Tabel 4.18: Statistika Deskriptif dari **LOSS2**

Rata-Rata	5.953,461
Variansi	$\approx 1,1 \times 10^9$
<i>Skewness</i>	25,717
Kurtosis	794,632
Median	2.331
Minimum	5
Maksimum	1.067.697

Berdasarkan rata-rata dari data, *ultimate ruin probability* dihitung untuk *capital* awal  $u$  bernilai 5.000, 10.000, 20.000, 50.000, 100.000, 250.000, 500.000, dan 1.000.000. Estimasi untuk tiap parameter dari masing-masing distribusi dengan metode *maximum likelihood estimation* (2.4) ditampilkan pada Tabel 4.19.

Tabel 4.19: Estimasi Parameter

Distribusi	Parameter	Estimasi
Eksponensial	$\lambda$	$\frac{1}{5.953,461}$
Weibull	$(\lambda, k)$	(3.597,022, 0,649)
Lomax	$(\lambda, \alpha)$	(4.359,399, 1,911)

Tabel 4.20 menampilkan karakteristik dari masing-masing distribusi.

Tabel 4.20: Karakteristik Tiap Distribusi

Distribusi	Rata-Rata	Variansi	<i>Skewness</i>	Kurtosis
$\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$	5.953,461	$3,54 \times 10^7$	2	6
Weibull(3.597,022, 0,649)	4.920,508	$6,17 \times 10^7$	3,491	30,323
Lomax(4.359,399, 1,911)	4.783,370	$\infty$	Undefined	Undefined

Untuk membandingkan distribusi yang *best fit* terhadap data, digunakan perbandingan selisih maksimum dari distribusi empiris dan distribusi yang diajukan. Distribusi empiris didefinisikan sebagai

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i \leq x}}{n}.$$

Berikut adalah nilai perbandingan yang digunakan.

$$D = \sup_{x \geq 0} |F_n(x) - F^*(x)|. \quad (4.2)$$

Tabel 4.21 menampilkan perbandingan nilai  $D$  untuk tiap distribusi yang diajukan.

Tabel 4.21: Hasil Perbandingan Distribusi

Distribusi	$D$
$\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$	0,2687
Weibull(3.597,022, 0,649)	0,1140
Lomax(4.359,399, 1,911)	0,0678

Nilai statistik uji yang terkecil adalah nilai statistik uji untuk distribusi Lomax(4.359,399, 1,911), sehingga distribusi yang *best fit* untuk data tersebut adalah distribusi Lomax(4.359,399, 1,911).

Untuk tiap distribusi, dihitung *ultimate ruin probability* untuk  $u = 5.000, 10.000, 20.000, 50.000, 100.000, 250.000, 500.000, 1.000.000$  dan  $\theta = 0,1, 0,3, 0,5$  dengan menggunakan metode yang telah dijelaskan pada subbab (3.2).

Tabel 4.22 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan asumsi klaim berdistribusi  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  untuk beberapa nilai  $u$ .

Tabel 4.22: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
5.000	0,842261	0,633700	0,503882
10.000	0,780343	0,522036	0,380825
20.000	0,669872	0,354337	0,217593
50.000	0,423783	0,110822	0,040596
100.000	0,197437	0,015972	0,002471
250.000	0,019974	$4,57 \times 10^{-5}$	$4,64 \times 10^{-7}$
500.000	$4,36 \times 10^{-4}$	$2,48 \times 10^{-9}$	$2,48 \times 10^{-13}$
1.000.000	$6,60 \times 10^{-5}$	$3,10 \times 10^{-12}$	$1,64 \times 10^{-18}$

Tabel 4.23 menampilkan hasil aproksimasi *ultimate ruin probability* dengan asumsi klaim berdistribusi Weibull(3.597,022, 0,649) untuk beberapa nilai  $u$ .

Tabel 4.23: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Weibull(3.597,022, 0,649)

$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
5.000	0,850468	0,650099	0,523356
10.000	0,803512	0,564203	0,427633
20.000	0,722093	0,433496	0,294767
50.000	0,530816	0,205342	0,104217
100.000	0,320146	0,061006	0,019695
250.000	0,070497	0,001643	$1,42 \times 10^{-4}$
500.000	0,005652	$3,98 \times 10^{-6}$	$3,74 \times 10^{-8}$
1.000.000	$7,78 \times 10^{-5}$	$2,97 \times 10^{-11}$	$2,78 \times 10^{-15}$

Tabel 4.24 menampilkan hasil *ultimate ruin probability* dengan asumsi klaim berdistribusi Lomax(4.359,399, 1,911) untuk beberapa nilai  $u$ .

Tabel 4.24: Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Distribusi Severitas Lomax(4.359,399, 1,911)

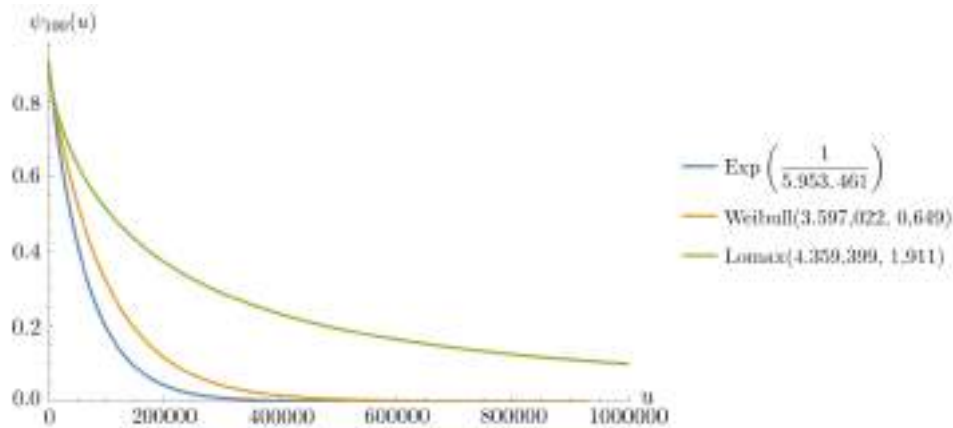
$u$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$
5.000	0,849524	0,648730	0,522163
10.000	0,810338	0,578081	0,444222
20.000	0,751863	0,484590	0,349237
50.000	0,635255	0,334773	0,216432
100.000	0,513977	0,220633	0,131220
250.000	0,325948	0,104441	0,058168
500.000	0,194158	0,053509	0,029806
1.000.000	0,100309	0,026802	0,015236

Dari ketiga tabel di atas, dapat dilihat bahwa hasilnya konsisten dengan sifat yang telah dijelaskan pada subbab 4.1, yaitu pada persamaan (3.12) dan (3.13), di mana ke-

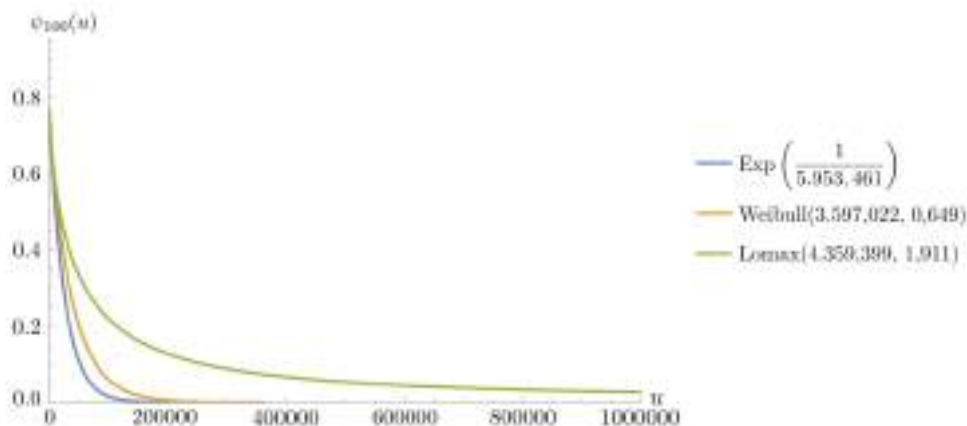
naikan  $u$  ataupun  $\theta$  menyebabkan penurunan *ultimate ruin probability*. Selain itu, penurunan *ultimate ruin probability* dari  $\theta = 0,1$  menjadi  $\theta = 0,3$  selalu lebih besar dari  $\theta = 0,3$  menjadi  $\theta = 0,5$ . Hal ini sesuai dengan sifat konveks dari fungsi *ultimate ruin probability* terhadap  $\theta$ . Dengan pertidaksamaan Jensen (3.15),  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\theta_1 = 0,1$ , dan  $\theta_2 = 0,5$ , berlaku:

$$\begin{aligned} T(0,3) &\leq \frac{T(0,1) + T(0,5)}{2} \\ \Leftrightarrow 2T(0,3) &\leq T(0,1) + T(0,5) \\ \Leftrightarrow T(0,3) - T(0,1) &\leq T(0,5) - T(0,3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

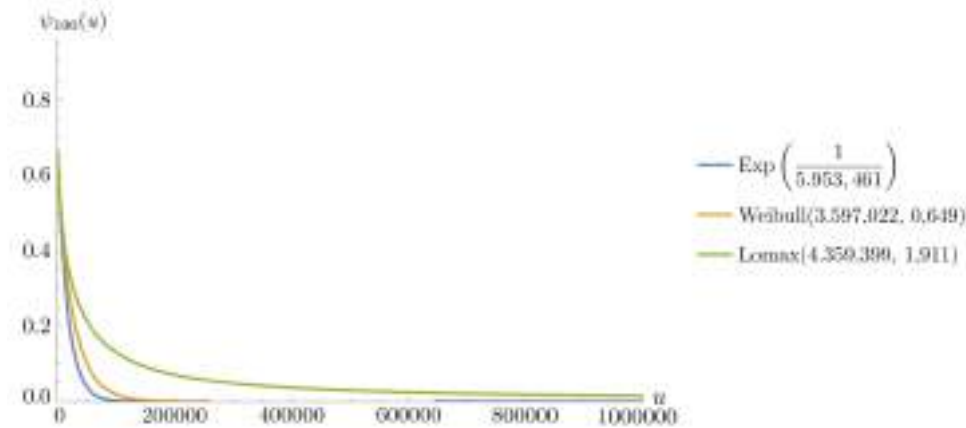
Gambar 4.27, 4.28, dan 4.29 menampilkan perbandingan grafik *ultimate ruin probability* dari ketiga distribusi untuk masing-masing nilai  $\theta$  (dikelompokkan berdasarkan  $\theta$ ), dengan nilai *capital* awal  $u$  yang digunakan adalah 0 hingga 1.000.000.



Gambar 4.27: Perbandingan Grafik *Ultimate Ruin Probability* untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan  $\theta = 0,1$



Gambar 4.28: Perbandingan Grafik *Ultimate Ruin Probability* untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan  $\theta = 0,3$



Gambar 4.29: Perbandingan Grafik *Ultimate Ruin Probability* untuk Asumsi Distribusi yang Berbeda dengan  $\theta = 0,5$

Dari ketiga grafik perbandingan 4.27, 4.28, dan 4.29, dapat dilihat bahwa grafik *ultimate ruin probability* antara distribusi  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  dan  $\text{Weibull}(3.597,022, 0,649)$ , distribusi eksponensial mendekati 0 lebih cepat dibandingkan distribusi Weibull. Hal ini sesuai dengan karakteristik dari distribusinya, di mana variansi, *skewness*, dan kurtosis dari distribusi  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  semuanya bernilai lebih kecil dibandingkan  $\text{Weibull}(3.597,022, 0,649)$ .

Grafik *ultimate ruin probability* dengan asumsi severitas berdistribusi eksponensial dan Weibull menurun jauh lebih cepat dibanding severitas Lomax untuk semua nilai  $\theta$ . Dengan  $\theta = 0,5$  dan  $u = 1.000.000$  untuk asumsi severitas berdistribusi  $\text{Lomax}(4.359,399, 1,911)$ , *ultimate ruin probability* masih bernilai 0,015236 (4.24), sedangkan  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  dan  $\text{Weibull}(3.597,022, 0,649)$  keduanya sudah bernilai kurang dari  $10^{-14}$ . Bahkan, severitas dengan distribusi  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  dan  $\text{Weibull}(3.597,022, 0,649)$  keduanya sudah bernilai kurang dari  $10^{-3}$  ketika  $u = 250.000$ .

Pada Tabel (4.21), telah diperlihatkan bahwa distribusi Lomax merupakan distribusi yang *best fit* terhadap data **LOSS2**. Oleh karena itu, pemilihan distribusi yang tepat merupakan hal yang penting agar estimasi *ultimate ruin probability* tidak terlalu jauh dengan kenyataannya. Jika severitas diasumsikan  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$  dan  $\text{Weibull}(3.597,022, 0,649)$  untuk  $\theta = 0,5$ , maka nilai  $u = 500.000$  sudah dapat dianggap aman karena nilainya yang sudah sangat insignifikan, yaitu kurang dari  $10^{-7}$  atau 0,00001%. Namun, karena  $\text{Lomax}(4.359,399, 1,911)$  merupakan distribusi yang *best fit*, di mana estimasi *ultimate ruin probability* pada saat  $u = 500.000$  masih bernilai 0,029806 atau 2,9806%, asumsi distribusi eksponensial maupun Weibull dapat berakibat fatal karena *underestimate* terhadap *ultimate ruin probability*.

### 4.3.2 Perbandingan Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability*

Pada bagian ini, dilakukan perbandingan hasil aproksimasi di atas dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine (2.12.5). Untuk tiap simulasi, banyaknya sampel yang digunakan untuk aproksimasi Pollaczek-Khinchine adalah  $2^{23} = 8.388.608$ . Pemilihan ukuran sampel tersebut berdasarkan penyesuaian sedemikian sehingga waktu *running* kurang lebih dengan aproksimasi dengan metode yang diajukan. Hasil aproksimasi dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dinotasikan dengan  $\psi^{PK}(u)$ .

Untuk membandingkan hasil aproksimasi dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dan metode yang diajukan, didefinisikan mutlak dari selisih aproksimasinya, yaitu

$$AD = |\psi_{100}(u) - \psi^{PK}(u)|. \quad (4.4)$$

Khusus untuk severitas berdistribusi eksponensial, digunakan juga *absolute error* (AE) terhadap *ultimate ruin probability* yang dihitung dengan formula eksplisit (3.31). *Absolute error* untuk hasil aproksimasi dengan metode yang diajukan dinotasikan dengan  $AE_B$  dan hasil aproksimasi dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dinotasikan dengan  $AE_{PK}$ .

Untuk setiap aproksimasi, waktu *running* dicantumkan dalam satuan detik. Perangkat yang digunakan untuk *running* memiliki spesifikasi *processor* Intel Core i5-8300H CPU Quad-core 2.30GHz (maksimum 4.00GHz) dan RAM sebesar 8 GB.

Tabel 4.25 menampilkan perbandingan aproksimasi untuk asumsi klaim berdistribusi  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$ .

Tabel 4.25: Perbandingan Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Severitas  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$

$\theta = 0,1$						
$u$	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	$\text{AE}_B$	$\psi^{PK}(u)$	$\text{AE}_{PK}$	AD
5.000	0,842266	0,842261	$5 \times 10^{-6}$	0,842440	$1,74 \times 10^{-4}$	$1,79 \times 10^{-4}$
10.000	0,780352	0,780343	$9 \times 10^{-6}$	0,780526	$1,74 \times 10^{-4}$	$1,83 \times 10^{-4}$
20.000	0,669845	0,669872	$2,7 \times 10^{-5}$	0,670046	$2,01 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-4}$
50.000	0,423667	0,423783	$1,16 \times 10^{-4}$	0,423870	$2,03 \times 10^{-4}$	$8,7 \times 10^{-5}$
100.000	0,197443	0,197437	$6 \times 10^{-6}$	0,197483	$4 \times 10^{-5}$	$4,6 \times 10^{-5}$
250.000	0,019985	0,019974	$1,09 \times 10^{-5}$	0,019947	$3,74 \times 10^{-5}$	$2,65 \times 10^{-5}$
500.000	$4,39 \times 10^{-4}$	$4,36 \times 10^{-4}$	$2,97 \times 10^{-6}$	$4,33 \times 10^{-4}$	$6,47 \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-6}$
1.000.000	$2,12 \times 10^{-7}$	$6,60 \times 10^{-5}$	$6,58 \times 10^{-5}$	0	$2,12 \times 10^{-7}$	$6,60 \times 10^{-5}$
Waktu	–	176,955	–	204,742	–	–

$\theta = 0,3$						
$u$	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	$\text{AE}_B$	$\psi^{PK}(u)$	$\text{AE}_{PK}$	AD
5.000	0,633703	0,633700	$3 \times 10^{-6}$	0,633718	$1,5 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-5}$
10.000	0,522053	0,522036	$1,7 \times 10^{-5}$	0,522134	$8,1 \times 10^{-5}$	$9,8 \times 10^{-5}$
20.000	0,354301	0,354337	$3,6 \times 10^{-5}$	0,354215	$8,6 \times 10^{-5}$	$1,22 \times 10^{-4}$
50.000	0,110751	0,110822	$7,1 \times 10^{-5}$	0,110585	$1,66 \times 10^{-4}$	$2,37 \times 10^{-4}$
100.000	0,015945	0,015972	$2,61 \times 10^{-5}$	0,015931	$1,4 \times 10^{-5}$	$4,01 \times 10^{-5}$
250.000	$4,76 \times 10^{-5}$	$4,57 \times 10^{-5}$	$1,92 \times 10^{-6}$	$4,63 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-6}$	$5,87 \times 10^{-7}$
500.000	$2,94 \times 10^{-9}$	$2,48 \times 10^{-9}$	$4,69 \times 10^{-10}$	0	$2,94 \times 10^{-9}$	$2,48 \times 10^{-9}$
1.000.000	$1,13 \times 10^{-17}$	$3,10 \times 10^{-12}$	$3,10 \times 10^{-12}$	0	$1,13 \times 10^{-17}$	$3,10 \times 10^{-12}$
Waktu	–	180,641	–	199,991	–	–

$\theta = 0,5$						
$u$	$\psi(u)$	$\psi_{100}(u)$	$\text{AE}_B$	$\psi^{PK}(u)$	$\text{AE}_{PK}$	AD
5.000	0,503881	0,503882	$1 \times 10^{-6}$	0,503645	$2,36 \times 10^{-4}$	$2,37 \times 10^{-4}$
10.000	0,380845	0,380825	$2 \times 10^{-5}$	0,380565	$2,8 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{-4}$
20.000	0,217564	0,217593	$2,9 \times 10^{-5}$	0,217486	$7,8 \times 10^{-5}$	$1,07 \times 10^{-4}$
50.000	0,040561	0,040596	$3,54 \times 10^{-5}$	0,040393	$1,68 \times 10^{-4}$	$2,03 \times 10^{-4}$
100.000	0,002468	0,002471	$3,51 \times 10^{-6}$	0,002458	$9,3 \times 10^{-6}$	$1,28 \times 10^{-5}$
250.000	$5,56 \times 10^{-7}$	$4,64 \times 10^{-7}$	$9,19 \times 10^{-8}$	0	$5,56 \times 10^{-7}$	$4,64 \times 10^{-7}$
500.000	$4,63 \times 10^{-13}$	$2,48 \times 10^{-13}$	$2,15 \times 10^{-13}$	0	$4,63 \times 10^{-13}$	$2,48 \times 10^{-13}$
1.000.000	$3,22 \times 10^{-25}$	$1,11 \times 10^{-17}$	$1,11 \times 10^{-17}$	0	$3,22 \times 10^{-25}$	$1,11 \times 10^{-17}$
Waktu	–	183,237	–	148,705	–	–

Dapat dilihat bahwa untuk hampir semua kasus, *absolute error* dengan menggunakan metode aproksimasi yang diajukan lebih kecil dibandingkan *absolute error* dengan menggunakan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine. *Absolute error* dengan

menggunakan metode aproksimasi yang diajukan lebih besar hanya ketika  $\theta = 0,3$  dan  $u = 100.000, 250.000$ . Untuk  $u = 1.000.000$ , walaupun *absolute error* metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine lebih kecil, estimasi bernilai 0 bukanlah estimasi yang baik karena  $\psi(u)$  tidak mungkin bernilai 0 akibat (3.12). Secara analitik,  $\psi(u)$  tidak mungkin bernilai 0 karena  $\psi'(u) < 0$  untuk semua  $u > 0$ . Jika  $\psi(u) = 0$  untuk suatu  $u > 0$ , maka haruslah  $\psi'(u) = 0$  juga karena  $0 \leq \psi(u) \leq 1$ , sehingga fungsi *ultimate ruin probability* tidak mungkin menurun lagi.

Tabel 4.26 menampilkan perbandingan aproksimasi untuk asumsi klaim berdistribusi Weibull(3.597,022, 0,649).

Tabel 4.26: Perbandingan Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Severitas Weibull(3.597,022, 0,649)

$u$	$\theta = 0,1$			$\theta = 0,3$		
	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD
5.000	0,850468	0,850538	$7 \times 10^{-5}$	0,650099	0,650281	$1,82 \times 10^{-4}$
10.000	0,803512	0,803544	$3,2 \times 10^{-5}$	0,564203	0,564299	$9,6 \times 10^{-5}$
20.000	0,722093	0,722092	$10^{-6}$	0,433496	0,433627	$1,31 \times 10^{-4}$
50.000	0,530816	0,530981	$1,65 \times 10^{-4}$	0,205342	0,205418	$7,6 \times 10^{-5}$
100.000	0,320146	0,320458	$3,12 \times 10^{-4}$	0,061006	0,060936	$6,97 \times 10^{-5}$
250.000	0,070497	0,070605	$1,08 \times 10^{-4}$	0,001643	0,001636	$6,99 \times 10^{-6}$
500.000	0,005652	0,005642	$1,03 \times 10^{-5}$	$3,98 \times 10^{-6}$	$4,05 \times 10^{-6}$	$6,84 \times 10^{-8}$
1.000.000	$7,78 \times 10^{-5}$	$3,55 \times 10^{-5}$	$4,23 \times 10^{-5}$	$2,97 \times 10^{-11}$	0	$2,97 \times 10^{-11}$
Waktu	220,128	606,357	—	216,304	256,088	—

$u$	$\theta = 0,5$		
	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD
5.000	0,523356	0,523343	$1,3 \times 10^{-5}$
10.000	0,427633	0,427523	$1,1 \times 10^{-4}$
20.000	0,294767	0,294644	$1,23 \times 10^{-4}$
50.000	0,104217	0,104173	$4,4 \times 10^{-5}$
100.000	0,019695	0,019606	$8,94 \times 10^{-5}$
250.000	$1,42 \times 10^{-4}$	$1,50 \times 10^{-4}$	$8,44 \times 10^{-6}$
500.000	$3,74 \times 10^{-8}$	0	$3,74 \times 10^{-8}$
1.000.000	$2,78 \times 10^{-15}$	0	$2,78 \times 10^{-15}$
Waktu	211,847	188,294	—

Tabel 4.27 menampilkan perbandingan aproksimasi untuk asumsi klaim berdistribusi Lomax(4.359,399, 1,911).

Tabel 4.27: Perbandingan Aproksimasi *Ultimate Ruin Probability* untuk Severitas Lomax(4.359,399, 1,911)

$u$	$\theta = 0,1$			$\theta = 0,3$		
	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD
5.000	0,849524	0,849485	$3,9 \times 10^{-5}$	0,648730	0,648821	$9,1 \times 10^{-5}$
10.000	0,810338	0,81035	$1,2 \times 10^{-5}$	0,578081	0,578300	$2,19 \times 10^{-4}$
20.000	0,751863	0,751811	$5,2 \times 10^{-5}$	0,484590	0,484943	$3,53 \times 10^{-4}$
50.000	0,635255	0,635275	$2 \times 10^{-5}$	0,334773	0,334955	$1,82 \times 10^{-4}$
100.000	0,513977	0,514001	$2,4 \times 10^{-5}$	0,220633	0,220697	$6,4 \times 10^{-5}$
250.000	0,325948	0,326031	$8,3 \times 10^{-5}$	0,104441	0,104419	$2,2 \times 10^{-5}$
500.000	0,194158	0,194337	$1,79 \times 10^{-4}$	0,053509	0,053551	$4,21 \times 10^{-5}$
1.000.000	0,100309	0,100215	$9,4 \times 10^{-5}$	0,026802	0,026814	$1,2 \times 10^{-5}$
Waktu	167,554	367,255	–	163,034	174,944	–

$u$	$\theta = 0,5$		
	$\psi_{100}(u)$	$\psi^{PK}(u)$	AD
5.000	0,522163	0,522450	$2,87 \times 10^{-4}$
10.000	0,444222	0,444465	$2,43 \times 10^{-4}$
20.000	0,349237	0,349535	$2,98 \times 10^{-4}$
50.000	0,216432	0,216531	$9,9 \times 10^{-5}$
100.000	0,131220	0,131290	$7 \times 10^{-5}$
250.000	0,058168	0,058330	$1,63 \times 10^{-4}$
500.000	0,029806	0,029823	$1,7 \times 10^{-5}$
1.000.000	0,015236	0,015215	$2,12 \times 10^{-5}$
Waktu	172,782	135,181	–

Untuk severitas berdistribusi Weibull atau Lomax, hasil aproksimasi dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dan metode yang diajukan tidak berbeda jauh untuk semua kasus. Ketika severitas diasumsikan berdistribusi Weibull, hal yang serupa dengan distribusi eksponensial berlaku, di mana beberapa aproksimasi dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine bernilai 0 untuk nilai  $u$  yang besar.

Dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine, aproksimasi bernilai 0 ketika  $\sum_{m=1}^{K_n} x_{n,m}$  bernilai kurang dari atau sama dengan  $u$  untuk  $n = 1, 2, \dots, 2^{23}$ , di mana  $K_n$  adalah banyaknya *ladder* dan  $x_{n,m}$  besarnya nilai sampel *integrated tail distribution*. Sebagai contoh, perhatikan perhitungan berikut dengan asumsi severitas  $\text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$ ,  $\theta = 0,3$ , dan *capital* awal  $u$  bernilai 1.000.000. Karena  $X_{n,m} \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{5.953,461}\right)$ , maka  $\sum_{m=1}^{K_n} X_{n,m} | K_n = k \sim \text{Gamma}\left(k, \frac{1}{5.953,461}\right)$ . Misalkan  $Y_n = \sum_{m=1}^{K_n} X_{n,m} | K_n = k$ .

Tabel 4.28: *Ultimate Ruin Probability* untuk  $k$  Tertentu

$k$	$\Pr(K_n = k)$	$\Pr(Y_n > 10^6)$	$\Pr(Y_n > 10^6) \Pr(K_n = k)$
1	0,769231	$1,13 \times 10^{-73}$	$8,66 \times 10^{-74}$
10	0,072538	$3,49 \times 10^{-59}$	$2,53 \times 10^{-60}$
25	0,001417	$5,38 \times 10^{-44}$	$7,63 \times 10^{-47}$
50	$2,01 \times 10^{-6}$	$2,83 \times 10^{-27}$	$5,69 \times 10^{-33}$
100	$4,03 \times 10^{-12}$	$5,72 \times 10^{-9}$	$2,31 \times 10^{-20}$
200	$1,63 \times 10^{-23}$	0,991217	$1,61 \times 10^{-23}$

Berdasarkan Tabel 4.28, dapat dilihat bahwa  $\Pr(Y_n > 10^6) \Pr(K_n = k)$  selalu bernilai sangat kecil karena salah satu antara  $\Pr(K_n = k)$  dan  $\Pr(Y_n > 10^6)$  berbanding terbalik. Untuk distribusi geometrik, berlaku  $\Pr(K = k_1) > \Pr(K = k_2)$  untuk  $k_1 < k_2$ , sehingga kenaikan  $k$  menyebabkan penurunan  $\Pr(K_n = k)$ . Sebaliknya, ketika *ladder* semakin banyak,  $\Pr(Y_n > 10^6)$  meningkat. Di sisi lain, berdasarkan banyak sampel,  $2^{-23} \approx 1,19 \times 10^{-7} > \Pr(Y_n > 10^6) \Pr(K_n = k), k = 1, 10, 25, 50, 100, 200$ .  $\Pr(Y_n > 10^6) \Pr(K_n = k)$  bernilai jauh lebih kecil dibanding nilai minimum probabilitas tak nol, yaitu ketika 1 sampel  $Y_n$  dari total sampel sebanyak  $2^{23}$  bernilai lebih dari  $10^6$ .

Akibatnya, diperlukan sampel yang jauh lebih banyak agar metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine dapat menangkap kejadian yang langka. Sebagai contoh,  $2^{30} = 1.073.741.824$  ( $2^{-30} \approx 9,31 \times 10^{-10}$ ),  $2^{40} = 1.099.511.627.776$  ( $2^{-40} \approx 9,09 \times 10^{-13}$ ), dan  $2^{50} = 1.125.899.906.842.624$  ( $2^{-50} \approx 8,88 \times 10^{-16}$ ), sehingga dibutuhkan sampel yang sangat banyak. Selain itu, metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine menggunakan barisan yang dihasilkan secara acak pada  $(0, 1)$ , sehingga eksistensi nilai ekstrem tidak terjamin, terlebih lagi pada kasus jumlah sampel yang tidak banyak. Hal ini berbeda dengan metode yang diajukan, di mana quasi-Monte Carlo menggunakan barisan memiliki sifat *low discrepancy* (2.15.1). Selain itu,  $\psi_n(u)$  tidak mungkin bernilai 0 karena  $\psi_n(u) \geq \psi(u) > 0$  untuk  $\psi_0(u) \in \left[\frac{1}{1+\theta}, 1\right]$  (akibat dari proposisi 3.8).

Jika dilihat dari waktu *running*, metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine membutuhkan waktu *running* yang lebih lama untuk nilai  $\theta$  yang lebih kecil. Hal ini terjadi karena ekspektasi dari  $K_n$  (2.14), yaitu

$$E[K_n] = \frac{1 - \frac{\theta}{1+\theta}}{\frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{\theta}.$$

$E[K_n] = \frac{1}{\theta}$  menurun seiring kenaikan nilai  $\theta$ . Nilai  $K_n$  digunakan untuk memperoleh sebanyak  $K_n$  sampel dari *integrated tail distribution*. Oleh karena itu, ekspektasi nilai  $K_n$

yang besar menyebabkan lebih banyak sampel yang perlu dihasilkan, sehingga membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama. Di sisi lain, perubahan nilai  $\theta$  tidak berpengaruh terhadap waktu *running* dengan metode yang diajukan. Hal ini berlaku karena banyaknya sampel sudah ditetapkan dari awal dan nilai  $\theta$  tidak memengaruhi banyak sampel.

## BAB 5 PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari Bab 1 hingga Bab 4, dapat diperoleh kesimpulan dari hasil penelitian ini.

1. Pengukuran ketidakpastian akibat klaim yang terjadi merupakan salah satu tantangan yang dihadapi perusahaan asuransi. Oleh karena itu, diperlukan suatu ukuran untuk mengukur risiko tersebut. Salah satu ukuran yang umum digunakan adalah *ultimate ruin probability*. *Ultimate ruin probability* adalah probabilitas *capital* perusahaan bernilai negatif pada suatu waktu.

Representasi *ultimate ruin probability* secara eksplisit dapat dinyatakan dalam formula Pollaczek-Khinchine dan persamaan integral Volterra. Namun, mengevaluasi kedua hal tersebut secara analitik tidak memungkinkan untuk sebagian besar distribusi severitas. Dengan mendefinisikan pemetaan fungsi *ultimate ruin probability* berdasarkan pendefinisian *ultimate ruin probability* dengan persamaan integral Volterra, dapat dimanfaatkan teorema titik tetap Banach untuk memperoleh barisan yang konvergen ke fungsi *ultimate ruin probability* dalam representasi formula Pollaczek-Khinchine.

2. Pada barisan yang diperoleh dengan teorema titik tetap Banach, perlu dilakukan estimasi terhadap cdf dari konvolusi *integrated tail distribution* yang berupa *ladder* individual pada proses *ladder*. Metode quasi-Monte Carlo (dengan barisan Sobol) digunakan untuk mengaproksimasi hal tersebut, di mana ketinggian *ladder* diperoleh dengan menggunakan inversi dari cdf *integrated tail distribution*, kemudian penjumlahan dari *ladder* yang independen dianggap sebagai satu sampel. Dengan menghasilkan sejumlah sampel, dapat diperoleh estimasi untuk cdf dari konvolusi *integrated tail distribution*. Namun, karena inversi dari suatu cdf belum tentu selalu memiliki bentuk yang tertutup, maka dibutuhkan metode numerik. Dari distribusi severitas yang ditinjau, metode numerik dibutuhkan untuk severitas Weibull, sedangkan severitas eksponensial dan Lomax dapat dihitung secara analitik. Metode numerik yang digunakan adalah metode regula falsi.
3. Penentuan distribusi yang bersesuaian dengan severitas klaim merupakan hal yang krusial dalam perhitungan *ultimate ruin probability*. Setiap distribusi memiliki karakteristik yang berbeda-beda. Salah satu karakteristik yang paling berpengaruh terhadap *ultimate ruin probability* adalah *tail* dari distribusinya. Distribusi dengan *tail* yang tebal (*heavy-tailed*) menyebabkan *ultimate ruin probability* yang

lebih tinggi karena probabilitas yang jauh lebih tinggi untuk terjadi klaim yang besar dibanding distribusi yang *light-tailed*. Faktor *loading* juga berpengaruh terhadap *ultimate ruin probability*. Besar kenaikan faktor *loading* memiliki pengaruh yang lebih signifikan dibandingkan besar kenaikan yang sama dengan faktor *loading* awal yang lebih besar. Hal ini karena fungsi *ultimate ruin probability* berupa fungsi yang konveks terhadap faktor *loading*.

4. Metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine merupakan salah satu metode aproksimasi numerik yang cukup umum digunakan untuk menghitung *ultimate ruin probability*. Jika dibandingkan dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine, metode yang diajukan memiliki beberapa perbedaan. Pada sebagian besar kasus, hasil aproksimasi dengan metode yang diajukan dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine memiliki selisih yang insignifikan. Waktu *running* dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine bergantung pada faktor *loading*, di mana faktor *loading* yang lebih kecil menyebabkan waktu *running* yang lebih lama, sedangkan waktu *running* dengan metode yang diajukan tidak bergantung pada faktor *loading*.

Namun, dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine, aproksimasinya dapat bernilai 0, walaupun pada nyatanya, fungsi *ultimate ruin probability* tidak pernah bernilai tepat 0. Hal ini mengakibatkan risiko yang kecil diabaikan dengan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine. Dengan metode yang diajukan, hasil aproksimasi lebih cenderung untuk tidak bernilai 0 karena sifat keseragaman barisan Sobol, sehingga hal ini merupakan keunggulan metode yang diajukan dibandingkan metode aproksimasi Pollaczek-Khinchine.

## 5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, terdapat beberapa saran yang dapat diberikan untuk penelitian lebih lanjut sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini, waktu kejadian antarklaim diasumsikan berdistribusi eksponensial. Formulasi *ultimate ruin probability* untuk asumsi waktu terjadinya antarklaim diasumsikan mengikuti distribusi selain distribusi eksponensial memiliki pendekatan yang berbeda, di mana model yang digunakan bukanlah model Cramér-Lundberg, melainkan model Sparre-Andersen.
2. Asumsi distribusi severitas dapat diperluas dengan menggunakan distribusi severitas selain eksponensial, Weibull, dan Lomax. Beberapa distribusi severitas yang dapat menjadi pertimbangan antara lain distribusi lognormal dan Burr. Selain itu, untuk kasus di mana cdf *integrated tail distribution* tidak memiliki *closed form*, dapat digunakan pendekatan numerik, seperti metode Brent's dan Ridders'. Kedua

metode ini berupa algoritma *root finding* yang cukup *robust* dan cepat dari segi waktu komputasi.

3. Efisiensi quasi-Monte Carlo dapat ditingkatkan dengan menggunakan *scrambling/randomizations*. Beberapa metode *scrambling* antara lain *nested uniform scramble* (NUS) dan *linear matrix scramble* (LMS) digabung dengan *digital random shift*. Dengan *scrambling* terhadap barisan *low discrepancy* yang deterministik, metode quasi-Monte Carlo menghasilkan *estimator* yang tak bias untuk cdf *integrated tail distribution*. *Scrambling* meningkatkan tingkat konvergensi, sehingga error dari estimasi cdf dapat dikurangi.

## DAFTAR REFERENSI

- [1] Adcock, C., Eling, M., & Loperfido, N. (2015). Skewed distributions in finance and actuarial science: a review. *The European Journal of Finance*, 21(13-14), 1253-1281
- [2] Aguilar, C. O. (2022). *An Introduction to Real Analysis*. Department of Mathematics, State University of New York.
- [3] Ahmad, Z., Mahmoudi, E., & Hamedani, G. (2022). A class of claim distributions: properties, characterizations and applications to insurance claim data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(7), 2183-2208.
- [4] Antonov, I. A. & Saleev, V. M. (1979). An economic method of computing  $LP_T$ -sequences. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 19(1), 252-256.
- [5] Asmussen, S. R. (2003). *Applied Probability and Queues*. Vol. 51. ISBN 978-0-387-00211-8.
- [6] Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, Inc., Publication
- [7] Botev, Z. & Ridder, A. (2017). Variance reduction. *Wiley Stats. Ref: Statistics reference online*, pp.1-6.
- [8] Bratley, P. & Fox, B. L. (1988). Algorithm 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 14(1), 88-100.
- [9] Burden, R. L. & Faires, J. D. (2010). *Numerical analysis* 8th ed. Thomson Brooks/Cole.
- [10] Burnecki, K., Mišta, P., & Weron, A. (2003). A new De Vylder type approximation of the ruin probability in infinite time. *Hugo Steinhaus Center Research Reports, Wrocław*.
- [11] Ciesielski, K. (2007). On Stefan Banach and some of his results. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1(1), 1-10.
- [12] Čížek, P., Weron, R., Härdle, W., Burnecki, K., Mišta, P., & Weron, A. (2005). Ruin probabilities in finite and infinite time. *Statistical tools for finance and insurance*, pp.341-379.
- [13] Cohen, S. D. (2010). Primitive elements on lines in extensions of finite fields. *Finite Fields: Theory and Applications, Contemporary Mathematics*, 518, 113-127.

- [14] Cui, T. & Franchetti, F. (2013). A Quasi-Monte Carlo approach for radial distribution system probabilistic load flow. *2013 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)* (pp. 1-6). IEEE.
- [15] Das, J. & Nath, D. C. (2019). Weibull Distribution as an Actuarial Risk Model: Computation of its Probability of ultimate Ruin and the moments of the time to ruin, deficit at ruin and Surplus prior to Ruin. *Journal of Data Science*, 17(1), pp.161-194.
- [16] Fadahunsi, A. I. (2016). Applications of the Scaled Laplace Transform in some Financial and Risk Models. *Graduate Theses, Dissertations, and Problem Reports*. <https://researchrepository.wvu.edu/etd/5563>
- [17] Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2024). *CLP-1 Differential Calculus*. LibreTexts
- [18] Galanti, S. & Jung, A. (1997). Low-discrepancy sequences: Monte Carlo simulation of option prices. *The Journal of Derivatives*, 5(1), pp.63-83.
- [19] Gallian, J. (2013). *Contemporary Abstract Algebra* (8th Edition). Chapman and Hall/CRC.
- [20] Gerber, H. U. (1979). An Introduction to Mathematical Risk Theory. *Huebner Foundation Monograph 8*. Philadelphia, Pa.: University of Pennsylvania. (Distributed by Irwin, Homewood, IL.)
- [21] Herman, R. (2022). *Introduction to Partial Differential Equations*. LibreTexts
- [22] Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2018). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th Edition). Boston: Pearson.
- [23] Jain, G., & Sigman, K. (1996). A Pollaczek-Khintchine Formula for M/G/1 Queues with Disasters. *Journal of Applied Probability*, 33(4), 1191–1200. <https://doi.org/10.2307/3214996>
- [24] Joe, S., & Kuo, F. Y. (2003). Remark on algorithm 659: Implementing Sobol's quasi-random sequence generator. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(1), 49-57.
- [25] Joe, S., & Kuo, F. Y. (2008). Notes on generating Sobol sequences. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(1), 49-57.
- [26] Judson, T. W. (2020). *Abstract Algebra: Theory and Applications*.
- [27] Jungnickel, D. & Vanstone, S. A. (1989). On primitive polynomials over finite fields. *Journal of Algebra*, 124(2), 337-353.

- [28] Khojasteh, F., Shukla, S., & Radenović, S. (2015). A new approach to the study of fixed point theory for simulation functions. *Filomat*, 29(6), pp.1189-1194.
- [29] Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions* 3rd Ed. John Wiley & Sons, Inc., Publication
- [30] Klüppelberg, C. (1988). Subexponential distributions and integrated tails. *Journal of Applied Probability*, 25(1), pp.132-141.
- [31] Kreyszig, E. (1991). *Introductory Functional Analysis with Applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.
- [32] Krykova, I. (2004). Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods (Doctoral dissertation, Worcester Polytechnic Institute).
- [33] Larsen, R. J. & Marx, M. L. (2005). *An Introduction to Mathematical Statistics* (p. 8). Hoboken, NJ: Prentice Hall.
- [34] Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling* (Vol. 20). New York: Springer.
- [35] Madden, D. J. (1981). Polynomials and primitive roots in finite fields. *Journal of Number Theory*, 13(4), 499-514.
- [36] Mannan, Md. A., Rahman, Md. R., Akter, H., Nahar, N., & Mondal, S. (2021). A Study of Banach Fixed Point Theorem and It's Applications. *American Journal of Computational Mathematics*, 11, 157-174. <https://doi.org/10.4236/ajcm.2021.112011>
- [37] Martínez Sánchez, J. & Baltazar-Larios, F. (2022). Approximations of the ultimate ruin probability in the classical risk model using the Banach's fixed-point theorem and the continuity of the ruin probability. *Kybernetika*, 58(2), pp.254-276.
- [38] Martire, A. L. (2022). Volterra integral equations: An approach based on Lipschitz-continuity. *Applied Mathematics and Computation*, 435, 127496.
- [39] McLaughlin, M. P. (2001). *A Compendium of Common Probability Distributions* (pp. 2014-01).
- [40] McShane, E. J. (1937). Jensen's inequality.
- [41] Olver, F. W. J., Daalhuis, A. B. O., Lozier, D. W., Schneider, B. I., Boisvert, R. F., Clark, C.W., Miller, B. R., Saunders, B. V., Cohl, H. S., & McClain, M. A. (2024). *Incomplete Gamma and Related Functions*. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov/8.2>, Release 1.2.1

- [42] Otoritas Jasa Keuangan. (2023). Peraturan Otoritas Jasa Keuangan Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2023 Tentang Produk Asuransi yang Dikaitkan Dengan Kredit atau Pembiayaan Syariah dan Produk Suretyship atau Suretyship Syariah.
- [43] Owen, A. B. (2020). On dropping the first Sobol'point. *International conference on Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods in scientific computing* (pp. 71-86). Cham: Springer International Publishing.
- [44] Pemerintah Indonesia. (2014). Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2014 Tentang Perasuransian.
- [45] Pitts, S. M. (2006). The fast Fourier transform algorithm in ruin theory for the classical risk model. *HERMIS: An International Journal of Computer Mathematics and Its Applications*, 7, pp.80-94.
- [46] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-88068-8.
- [47] Ramsay, C. M. & Usabel, M. A., (1997). Calculating ruin probabilities via product integration. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 27(2), pp.263-271.
- [48] Ramsay, C. M. (2003). A solution to the ruin problem for Pareto distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1), 109-116.
- [49] Rolski, T. (2010). Some Problems in the Theory of Risk. *Instytut Matematyczny PAN. Warsaw*.
- [50] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., & Teugels, J. L. (2009). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.
- [51] Ross, S. M. (2019). *Introduction to Probability Models* (12th Edition). Elsevier.
- [52] Roussos, I. (2016). *Improper Riemann Integrals*. CRC Press.
- [53] Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.
- [54] Santana, D. J., González-Hernández, J., & Rincón, L. (2017). Approximation of the ultimate ruin probability in the classical risk model using Erlang mixtures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 19, pp.775-798.
- [55] Shukla, S., Balasubramanian, S., & Pavlović, M. (2016). A generalized Banach fixed point theorem. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39, pp.1529-1539.

- [56] Smith, K. (2013). *Precalculus: A Functional Approach to Graphing and Problem Solving*. Jones & Bartlett Publishers.
- [57] Sobol, I. M. (1998). On quasi-monte carlo integrations. *Mathematics and computers in simulation*, 47(2-5), 103-112.
- [58] Stage, S. A. (2013). Comments on an improvement to the Brent's method. *International Journal of Experimental Algorithms*, 4(1), 1-16.
- [59] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). Princeton lectures in analysis. *Princeton: Princeton University Press*.
- [60] Thompson, E. (2013). *Ultimate Ruin Probability in the Dependent Claim Sizes and Claim Occurrence Times Models* (Doctoral thesis, University of Calgary, Calgary, Canada).
- [61] Tse, Y.K. (2009). *Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- [62] Van, H. M., Vose, D., & Vanden, B. S. (2012). A Compendium of Distributions (second edition). *Vose Software, Ghent, Belgium*.
- [63] Venter, G. (1983). Transformed beta and gamma distributions and aggregate losses. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 70, No. 133, pp. 289-308).
- [64] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2016). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists* (9th ed. Global ed.). Tokyo: Pearson.
- [65] Yang, S., Xu, G., Meng, H., & Wang, M. (2021). Progressive neighbors pursuit for radar images classification. *Applied Soft Computing*, 109, 107194.

# LAMPIRAN

## Lampiran 1: Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial Menggunakan Metode MLE

Dengan pdf distribusi Eksponensial  $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$  (2.30), fungsi *likelihood*-nya adalah

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^n \exp \left[ -\lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \right].$$

Fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$l(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Untuk mencari mle-nya, tentukan turunan dari  $l(\lambda)$  dan cari solusi  $\lambda$  untuk  $l'(\lambda) = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 = l'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \\ \Rightarrow \frac{n}{\lambda} &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned} \tag{1}$$

## Lampiran 2: Estimasi Parameter Distribusi Weibull Menggunakan Metode MLE

Dengan pdf distribusi Weibull  $f(x; \lambda, k) = \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^k \right]$  (2.36), fungsi *likelihood*-nya adalah

$$L(\lambda, k) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda, k) = \left( \frac{k}{\lambda^k} \right)^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{k-1} \exp \left[ - \frac{1}{\lambda^k} \left( \sum_{i=1}^n x_i^k \right) \right].$$

Fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} l(\lambda, k) &= \ln \left( \frac{k}{\lambda^k} \right)^n + (k-1) \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k \\ &= n \ln k - nk \ln \lambda + k \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) - \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k \\ &= n \ln k - nk \ln \lambda + k \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k. \end{aligned}$$

Untuk mencari mle-nya, tentukan turunan parsial dari  $l(\lambda, k)$  terhadap masing-masing parameter dan cari solusi  $\lambda$  dan  $k$  untuk  $\frac{\partial l(\lambda, k)}{\partial \lambda} = 0$  dan  $\frac{\partial l(\lambda, k)}{\partial k} = 0$  berturut-turut. Pertama, tentukan mle untuk  $\lambda$  terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial l(\lambda, k)}{\partial \lambda} = -\frac{nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \Rightarrow -n + \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k &= n \\ \Rightarrow \lambda &= \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya, akan dicari mle untuk  $k$ .

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial l(\lambda, k)}{\partial k} = \frac{n}{k} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{\lambda} \right) \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k \\
&\Rightarrow \frac{n}{k} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \lambda) \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k = 0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{k} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k + \sum_{i=1}^n \ln \lambda \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k = 0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{k} + \ln \lambda \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k - n \right) + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i \left( \frac{x_i}{\lambda} \right)^k = 0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{k} + \ln \lambda \left( \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k - n \right) + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Substitusi mle dari  $\lambda$  yang telah diperoleh pada (2) ke (3).

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{k} + \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^k} \sum_{i=1}^n x_i^k - n \right) + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^k} \right) \sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i = 0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{k} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^k} \right) \sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Dapat dilihat bahwa  $k$  tidak dapat dinyatakan secara eksplisit. Oleh karena itu, persamaan (4) harus diselesaikan secara numerik. Jadi, sistem persamaan yang diselesaikan untuk memperoleh mle dari distribusi Weibull adalah

$$\begin{cases} \lambda = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \right)^{\frac{1}{k}}, \\ \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

### Lampiran 3: Estimasi Parameter Distribusi Lomax Menggunakan Metode MLE

Dengan pdf distribusi Lomax  $f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}$  (2.49), fungsi *likelihood*-nya adalah

$$L(\alpha, \lambda) = \frac{(\alpha \lambda^\alpha)^n}{\left[ \prod_{i=1}^n (x_i + \lambda) \right]^{\alpha+1}}.$$

Fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} l(\alpha, \lambda) &= n \ln(\alpha \lambda^\alpha) - (\alpha + 1) \ln \left[ \prod_{i=1}^n (x_i + \lambda) \right] \\ &= n \ln \alpha + n \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \lambda). \end{aligned}$$

Untuk mencari mle-nya, tentukan turunan parsial dari  $l(\alpha, \lambda)$  terhadap masing-masing parameter dan cari solusi  $\alpha$  dan  $\lambda$  untuk  $\frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = 0$  dan  $\frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$  berturut-turut. Pertama, tentukan mle untuk  $\alpha$  terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \lambda) \\ \Rightarrow \frac{n}{\alpha} &= \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \lambda) - n \ln \lambda \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i + \lambda) - n \ln \lambda} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya, akan dicari mle untuk  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \lambda} \\ \Rightarrow \frac{n\alpha}{\lambda} &= (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \lambda}. \end{aligned} \tag{7}$$

Substitusi mle dari  $\alpha$  yang telah diperoleh pada (6) ke (7).

$$\frac{n^2}{\lambda \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \lambda} \tag{8}$$

Dapat dilihat bahwa pada persamaan 8,  $\lambda$  tidak dapat dinyatakan secara eksplisit. Oleh karena itu, persamaan (8) harus diselesaikan secara numerik. Jadi, sistem persamaan yang

diselesaikan untuk memperoleh mle dari distribusi Lomax adalah:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)}, \\ \frac{n^2}{\lambda \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\lambda} + 1\right)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \lambda}. \end{cases} \quad (9)$$

## Lampiran 4: Sintaks Python

Berikut adalah sintaks Python yang digunakan.

### 1. Inisialisasi *Package*

```
import time
import timeit

import random as random
from sympy import *
from scipy import *
import math
from numpy import *

from scipy.special import gamma, beta, factorial, gammainc, gammaincc,
                             gammaincinv, gammainccinv
from scipy.stats import qmc, expon, gamma, lomax, exponweib, weibull_min,
                             anderson ,kstest, cramervonmises

from tabulate import tabulate
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import seaborn as sns
from collections import Counter
from google.colab import files

x = symbols('x')
```

### 2. Inisialisasi Variabel dan Fungsi

```
theta = 0.1 #atau 0.3 atau 0.5
phi = 1/(1+theta)
phi2 = 1 - phi

#Reserve u
list_u1 = list(range(0, 100001, 500))
list_u2 = list(range(0, 1000001, 5000))
list_u3 = [500,1000,5000,10000,20000,50000,100000]
list_u4 = [5000,10000,20000,50000,100000,250000,500000,1000000]

#Generate variabel random Negative Binomial
def negbin(q):
r = random.uniform(0,1)
n = 0
p = 1 - q
pr = q
while r>pr:
```

```
n = n + 1
pr = pr + q*p**n
return n
```

### 3. Fungsi Ultimate Ruin Probability untuk Distribusi Eksponensial

```
def f(x):
    return 1/(1+theta)*exp(-(theta*beta*x)/(1+theta))
```

### 4. Karakteristik Distribusi

#### (a) Distribusi Eksponensial

```
#Exponential Distribution
beta = 1/5953.461194029851
def expmoment(n):
    return math.gamma(n+1)/beta**n

print("Mean :", expmoment(1))
print("Variance :", expmoment(2)-(expmoment(1))**2)
```

#### (b) Distribusi Weibull

```
#Weibull Distribution
lambd = 3597.0223641800394
l = 0.6492885337460262
def weibmoment(n):
    return lambd**n*math.gamma(1+n/l)

print("Mean :", weibmoment(1))
print("Variance :", weibmoment(2)-(weibmoment(1))**2)
print("Skewness :", (weibmoment(3)-3*weibmoment(2)*weibmoment(1)+2*
                    weibmoment(1)**2)/((
                    weibmoment(2)-(weibmoment(1))
                    **2)**(3/2)))
print("Kurtosis :", (weibmoment(4)-4*weibmoment(3)*weibmoment(1)+6*
                    weibmoment(2)*(weibmoment(1))
                    **2-3*(weibmoment(1))**4)/((
                    weibmoment(2)-(weibmoment(1))
                    **2)**(2)))
```

#### (c) Distribusi Lomax

```
#Lomax Distribution
alpha = 1.9113657005300786
lambd = 4359.3995681870565
```

```

def lmxmoment(n):
    return lambd**n*math.gamma(n+1)*math.gamma(alpha-n)/math.gamma(alpha)

print("Mean :", lmxmoment(1))
print("Variance :", lmxmoment(2)-(lmxmoment(1))**2)
print("Skewness :", (lmxmoment(3)-3*lmxmoment(2)*lmxmoment(1)+2*(
    lmxmoment(1))**2)/((lmxmoment(2)-(lmxmoment(1))**2)**(3/2)
))
print("Kurtosis :", (lmxmoment(4)-4*lmxmoment(3)*lmxmoment(1)+6*
    lmxmoment(2)*lmxmoment(1)**2-3*lmxmoment(1)**4)/((
    lmxmoment(2)-(lmxmoment(1))**2)**(2)))

```

#### 5. Ultimate Ruin Probability Eksplisit untuk Distribusi Ekspensial

```

#Parameter
beta = 1/1000

start_time = time.time()

p = []
for i in range(len(list_u3)):
    p.append(f(list_u3[i]))

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))
print(tabulate(list(zip(list_u3,p)),headers = ['u', 'Ruin Probability'],
    tablefmt="fancy_grid"))

```

#### 6. Ultimate Ruin Probability berdasarkan Banach's Fixed-Point Theorem

##### (a) Distribusi Ekspensial

```

#Parameter
beta = 1/1000

#QMC untuk mengestimasi cdf integrated tail distribution
def FconvExp(n, list_u):
    sampler = qmc.Sobol(d=n, scramble=False)
    q = 18
    sample = sampler.random_base2(m=q)
    k = 2**q
    sample1 = []
    for i in range(1,k):

```

```

sample11 = []
for j in range(n):
    r = sample[i][j]
    L = -log(r)/beta
    sample11.append(L)
sample1.append(sample11)

conv1 = []
for i in range(k-1):
    sum = 0
    conv = []
    for j in range(n):
        sum = sum + sample1[i][j]
        conv.append(sum)
    conv1.append(conv)

pr2 = []
for u in list_u:
    pr1 = []
    for i in range(n):
        suc = 0
        fail = 0
        pr = 0
        for j in range(k-1):
            if conv1[j][i]>u:
                fail = fail + 1
            elif conv1[j][i]<=u:
                suc = suc + 1
        pr = suc/(suc+fail)
        pr1.append(pr)
    pr2.append(pr1)
return pr2

start_time = time.time()
p = []
n = 100
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
sigmaFc = FconvExp(n, listu)

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi
    sum = 0
    for j in range(n-1):
        sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
    psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum

```

```

p.append(psi)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))
print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u', 'Ruin Probability'],
              tablefmt="fancy_grid"))

```

## (b) Distribusi Weibull

```

#Parameter
lambd = 3597.0223641800394
k = 0.6492885337460262

#QMC untuk mengestimasi cdf integrated tail distribution
def FconvWeib(n, list_u):
    sampler = qmc.Sobol(d=n, scramble=False)
    q = 18
    sample = sampler.random_base2(m=q)
    k = 2**q
    sample1 = []
    for i in range(1,k):
        sample11 = []
        for j in range(n):
            r = sample[i][j]
            val = gammainccinv(1/k,1-r)
            L = lambd*val**(1/k)
            sample11.append(L)
        sample1.append(sample11)

    conv1 = []
    for i in range(k-1):
        sum = 0
        conv = []
        for j in range(n):
            sum = sum + sample1[i][j]
            conv.append(sum)
        conv1.append(conv)

    pr2 = []
    for u in list_u:
        pr1 = []
        for i in range(n):
            suc = 0
            fail = 0
            pr = 0
            for j in range(k-1):
                if conv1[j][i]>u:
                    fail = fail + 1
                elif conv1[j][i]<=u:

```

```

        suc = suc + 1
    pr = suc/(suc+fail)
    pr1.append(pr)
    pr2.append(pr1)
    return pr2

```

```

start_time = time.time()
p = []
n = 100
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
sigmaFc = FconvWeib(n,listu)

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi
    sum = 0
    for j in range(n-1):
        sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
    psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum
    p.append(psi)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))
print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u', 'Ruin Probability'],
              tablefmt="fancy_grid"))

```

(c) Distribusi Lomax

```

#Parameter
alpha = 1.9113657005300786      #alpha>1
m = 4359.3995681870565

#QMC untuk mengestimasi cdf integrated tail distribution
def FconvLomax(n,list_u):
    sampler = qmc.Sobol(d=n, scramble=False)
    q = 18
    sample = sampler.random_base2(m=q)
    k = 2**q
    sample1 = []
    for i in range(1,k):
        sample11 = []
        for j in range(n):
            r = sample[i][j]
            L = m*(1/(1-r)**(1/(alpha-1)) - 1)
            sample11.append(L)
        sample1.append(sample11)

conv1 = []

```

```

for i in range(k-1):
    sum = 0
    conv = []
    for j in range(n):
        sum = sum + sample1[i][j]
        conv.append(sum)
    conv1.append(conv)

pr2 = []
for u in list_u:
    pr1 = []
    for i in range(n):
        suc = 0
        fail = 0
        pr = 0
        for j in range(k-1):
            if conv1[j][i]>u:
                fail = fail + 1
            elif conv1[j][i]<=u:
                suc = suc + 1
        pr = suc/(suc+fail)
        pr1.append(pr)
    pr2.append(pr1)
return pr2

```

```

start_time = time.time()
p = []
n = 100
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
sigmaFc = FconvLomax(n,listu)

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi
    sum = 0
    for j in range(n-1):
        sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
    psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum
    p.append(psi)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))
print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u', 'Ruin Probability'],
              tablefmt="fancy_grid"))

```

### 7. List Titik untuk Grafik *Ultimate Ruin Probability*

## (a) Distribusi Eksponensial

```

start_time = time.time()
listu = list_u1      #list_u1 atau list_u2
expcdf = FconvExp(100,listu)
print("%ss" % (round(time.time() - start_time,5)))

```

```

p = []
n = 100
sigmaFc = expcdf

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi
    sum = 0
    for j in range(n-1):
        sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
    psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum
    p.append(psi)

b = []
for i in range(0,len(listu)):
    b.append("{"+str(listu[i])+", "+str(p[i])+"}")
for i in range(0,len(b)):
    if i == len(b)-1:
        print(b[i],end=" ")
    else:
        print(b[i]+",",end=" ")

#Hasil diplot di Wolfram Mathematica

```

## (b) Distribusi Weibull

```

start_time = time.time()
listu = list_u1      #list_u1 atau list_u2
weibcdf = FconvWeib(100,listu)
print("%ss" % (round(time.time() - start_time,5)))

```

```

p = []
n = 100
sigmaFc = weibcdf

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi

```

```

sum = 0
for j in range(n-1):
    sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum
p.append(psi)

b = []
for i in range(0,len(listu)):
    b.append("{"+str(listu[i])+", "+str(p[i])+"}")
for i in range(0,len(b)):
    if i == len(b)-1:
        print(b[i],end=" ")
    else:
        print(b[i]+",",end=" ")

#Hasil diplot di Wolfram Mathematica

```

## (c) Distribusi Lomax

```

start_time = time.time()
listu = list_u1      #list_u1 atau list_u2
lmaxcdf = FconvLomax(100,listu)
print("%ss" % (round(time.time() - start_time,5)))

```

```

p = []
n = 100
sigmaFc = lmaxcdf

for i in range(len(listu)):
    convo = sigmaFc[i]
    psi_0 = phi
    sum = 0
    for j in range(n-1):
        sum = sum + phi**(j+1)*convo[j]
    psi = phi - (1-psi_0)*phi**n*convo[n-1]-(1-phi)*sum
    p.append(psi)

b = []
for i in range(0,len(listu)):
    b.append("{"+str(listu[i])+", "+str(p[i])+"}")
for i in range(0,len(b)):
    if i == len(b)-1:
        print(b[i],end=" ")
    else:
        print(b[i]+",",end=" ")

```

```
#Hasil diplot di Wolfram Mathematica
```

## 8. Aproksimasi Pollaczek-Khinchine

### (a) Distribusi Eksponensial

```
#Parameter
beta = 1/1000

p = []
n = 2**23
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
indic = 0
indic3 = []
start_time = time.time()
for i in range(n):
    indic2 = []
    M = 0
    for j in range(negbin(phi2)):
        r = random.uniform(0,1)
        L = -log(r)/beta
        M = M + L
    for k in range(0,len(listu)):
        if M>listu[k]:
            indic = 1
        else:
            indic = 0
    indic2.append(indic)
    indic3.append(indic2)

for i in range(len(listu)):
    sum = 0
    for j in range(n):
        sum = sum + indic3[j][i]
    pr = sum/n
    p.append(pr)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))

print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u','Ruin Probability'],
            tablefmt="fancy_grid"))
```

### (b) Distribusi Weibull

```
lambd = 3597.0223641800394
k = 0.6492885337460262
```

```

p = []
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
n = 2**23
indic = 0
indic3 = []

start_time = time.time()
for i in range(n):
    indic2 = []
    M = 0
    for j in range(negbin(phi2)):
        r = random.uniform(0,1)
        val = gammainccinv(1/k,1-r)
        L = lambd*val**(1/k)
        M = M + L
    for k in range(0,len(listu)):
        if M>listu[k]:
            indic = 1
        else:
            indic = 0
        indic2.append(indic)
    indic3.append(indic2)

for i in range(len(listu)):
    sum = 0
    for j in range(n):
        sum = sum + indic3[j][i]
    pr = sum/n
    p.append(pr)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))

print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u','Ruin Probability'],
              tablefmt="fancy_grid"))

```

## (c) Distribusi Lomax

```

alpha = 1.9113657005300786      #alpha>1
m = 4359.3995681870565

p = []
listu = list_u3      #list_u3 atau list_u4
n = 2**23
indic = 0
indic3 = []

```

```

start_time = time.time()
for i in range(n):
    indic2 = []
    M = 0
    for j in range(negbin(phi2)):
        r = random.uniform(0,1)
        L = m*(1/(1-r)**(1/(alpha-1)) - 1)
        M = M + L
    for k in range(0,len(listu)):
        if M>listu[k]:
            indic = 1
        else:
            indic = 0
        indic2.append(indic)
    indic3.append(indic2)

for i in range(len(listu)):
    sum = 0
    for j in range(n):
        sum = sum + indic3[j][i]
    pr = sum/n
    p.append(pr)

print("%ss" % (round(time.time() - start_time,3)))

print(tabulate(list(zip(listu,p)),headers = ['u','Ruin Probability'],
            tablefmt="fancy_grid"))

```

## 9. Estimasi Paramter dan Uji Kolmogorov-Smirnow pada Data Aktual

```

uploaded = files.upload()

df = pd.read_csv("AutoBi2.csv")
df.describe()

claim = df['LOSS2'].tolist()
claim2 = np.sort(claim)
n = len(claim2)

ecdf_values = np.arange(1, n+1) / n
df_ecdf = pd.DataFrame({'Data': claim2, 'ECDF': ecdf_values})
ecdf_list = ecdf_values.tolist()

data = df_ecdf["Data"].tolist()
ecdf = df_ecdf["ECDF"].tolist()

```

```
params_exp = expon.fit(data, floc=0)           #Exponential distribution
params_weibull = weibull_min.fit(data, floc=0) #Weibull distribution
params_lomax = lomax.fit(data, floc=0)        #Lomax distribution

#Tes Kolmogorov-Smirnov
D_exp, p_exp = kstest(data, 'expon', args=params_exp)
D_weibull, p_weibull = kstest(data, 'weibull_min', args=params_weibull)
D_lomax, p_lomax = kstest(data, 'lomax', args=params_lomax)

print(params_exp)
print(params_weibull)
print(params_lomax)

print(f"Exponential: D={D_exp:.4f}, p-value={p_exp:.20f}")
print(f"Weibull: D={D_weibull:.4f}, p-value={p_weibull:.20f}")
print(f"Lomax: D={D_lomax:.4f}, p-value={p_lomax:.20f}")
```

## Lampiran 5: Sintaks Wolfram Mathematica

Karena permasalahan dalam *compiling*, untuk menggunakan kode Mathematica berikut, perlu dilakukan konversi untuk - and " dengan menggunakan fitur "Find and Replace" pada Wolfram Mathematica. Untuk -, unicode standarnya (unicode standar adalah unicode dari karakter yang diketik dengan *keyboard*) adalah U+002D, sedangkan unicode hasil *compile* adalah U+2212. Untuk ", unicode standarnya adalah U+0022, sedangkan unicode hasil *compile* adalah U+201D.

### 1. Plot Barisan Uniform dan Barisan Sobol

```
ListPlot[BlockRandom[SeedRandom[Method->{"MKL"},Method->{"Sobol"}, "Dimension"->2}}];RandomReal[1,{1024,2}], Frame->True, AspectRatio->1, PlotStyle->PointSize[Small]]
```

```
ListPlot[BlockRandom[SeedRandom[Method->{"MKL"},Method->{"Sobol"}, "Dimension"->2}}];RandomReal[1,{8192,2}], Frame->True, AspectRatio->1, PlotStyle->PointSize[Small]]
```

```
ListPlot[RandomReal[{0,1},{1024,2}], Frame->True, AspectRatio->1, PlotStyle->PointSize[Small]]
```

```
ListPlot[RandomReal[{0,1},{8192,2}], Frame->True, AspectRatio->1, PlotStyle->PointSize[Small]]
```

### 2. Plot Fungsi Gama

```
Plot[Gamma[x], {x, 0, 5}, PlotRange -> {0,25}, AxesLabel -> {"x", "\[Gamma] (x)"}, PlotStyle -> Thick]
```

### 3. Plot Pdf dan Cdf Distribusi

#### (a) Distribusi Eksponensial

```
Plot[{PDF[ExponentialDistribution[1/500],x], PDF[ExponentialDistribution[1/1000],x], PDF[ExponentialDistribution[1/2000],x]},{x,0,2000},AxesLabel->{"x", "f(x)"}, PlotLabel-> "", PlotRange->All, PlotLegends->{"\[Beta] = 1/500", "\[Beta] = 1/1000", "\[Beta] = 1/2000"}]
```

```

Plot[{CDF[ExponentialDistribution[1/500],x], CDF[
  ExponentialDistribution[1/1000],x], CDF[ExponentialDistribution
  [1/2000],x]}, {x,0,5000}, AxesLabel->{"x","f(x)", PlotLabel->"",
  PlotRange->All, PlotLegends->{"\[Beta] = 1/500", "\[Beta] =
  1/1000", "\[Beta] = 1/2000"}]}

```

## (b) Distribusi Gamma

```

Plot[{PDF[GammaDistribution[0.25,4000],x], PDF[GammaDistribution
  [0.5,2000],x], PDF[GammaDistribution[5,200],x], PDF[
  GammaDistribution[50,20],x]}, {x,0,2000}, AxesLabel->{"x","f(x)"
  }, PlotLabel->"", PlotRange->{0,0.0025}, PlotLegends->{"\[Alpha]
  = 1/4, \[Beta] = 1/4000", "\[Alpha] = 1/2, \[Beta] = 1/2000", "\[
  Alpha] = 5, \[Beta] = 1/200", "\[Alpha] = 50, \[Beta] = 1/20"}]}

Plot[{CDF[GammaDistribution[0.25,4000],x], CDF[GammaDistribution
  [0.5,2000],x], CDF[GammaDistribution[5,200],x], CDF[
  GammaDistribution[10,100],x]}, {x,0,5000}, AxesLabel->{"x","f(x)"
  }, PlotLabel->"", PlotRange->{0,1}, PlotLegends->{"\[Alpha] =
  1/4, \[Beta] = 1/4000", "\[Alpha] = 1/2, \[Beta] = 1/2000", "\[
  Alpha] = 5, \[Beta] = 1/200", "\[Alpha] = 50, \[Beta] = 1/20"}]}

```

## (c) Distribusi Weibull

```

Plot[{PDF[WeibullDistribution[1/3,1000/6],x], PDF[WeibullDistribution
  [1/2,500],x], PDF[WeibullDistribution[4/3,1000/Gamma[7/4]],x],
  PDF[WeibullDistribution[2,2000/Sqrt[\[Pi]]],x]}, {x,0,2000},
  AxesLabel->{"x","f(x)", PlotLabel->"", PlotRange->{0,0.002},
  PlotLegends->{"\[Lambda] = 1000/6, k = 1/3", "\[Lambda] = 500, k
  = 1/2", "\[Lambda] = 1000/(\[CapitalGamma](7/4)), k = 4/3", "\[
  Lambda] = 2000/Sqrt[\[Pi]], k = 2"}]}

Plot[{CDF[WeibullDistribution[1/3,1000/6],x], CDF[WeibullDistribution
  [1/2,500],x], CDF[WeibullDistribution[4/3,1000/Gamma[7/4]],x],
  CDF[WeibullDistribution[2,2000/Sqrt[\[Pi]]],x]}, {x,0,5000},
  AxesLabel->{"x","f(x)", PlotLabel->"", PlotRange->{0,1},
  PlotLegends->{"\[Lambda] = 1000/6, k = 1/3", "\[Lambda] = 500, k =
  1/2", "\[Lambda] = 1000/(\[CapitalGamma](7/4)), k = 4/3", "\[
  Lambda] = 2000/Sqrt[\[Pi]], k = 2"}]}

```

## (d) Distribusi Lomax

```

Plot[{PDF[ParetoDistribution[200,0.5,0],x], PDF[ParetoDistribution
  [250,1.25,0],x], PDF[ParetoDistribution[1500,2.5,0],x], PDF[
  ParetoDistribution[2500,3.5,0],x], PDF[ParetoDistribution

```

```
[3500,4.5,0],x}}, {x,0,2000}, AxesLabel->{"x","f(x)", PlotLabel
->"", PlotRange->{0,0.003}, PlotLegends->{"l=200, \[Theta] = 1/2"
, "l=250, \[Theta] =5/4", "l=1500, \[Theta]=5/2", "l=2500, \[
Theta]=7/2", "l=3500, \[Theta]=9/2"}]
```

```
Plot[{CDF[ParetoDistribution[200,0.5,0],x], CDF[ParetoDistribution
[250,1.25,0],x], CDF[ParetoDistribution[1500,2.5,0],x], CDF[
ParetoDistribution[2500,3.5,0],x], CDF[ParetoDistribution
[3500,4.5,0],x]}, {x,0,5000}, AxesLabel->{"x","f(x)", PlotLabel
->"", PlotRange->{0,1}, PlotLegends->{"l=200, \[Theta] = 1/2", "l
=250, \[Theta] =5/4", "l=1500, \[Theta]=5/2", "l=2500, \[Theta
]=7/2", "l=3500, \[Theta]=9/2"}]
```

#### 4. Plot Grafik *Ultimate Ruin Probability*

Pada plot grafik *ultimate ruin probability*, list titik-titik diperoleh dari hasil *running* Python (bagian 7). List tersebut dinamakan dengan nama distribusi, diikuti dengan dua digit di belakang yang menunjukkan parameter dan nilai  $\theta$  berturut-turut. Kode parameter bersesuaian dengan tabel karakteristik ((4.1), (4.5), (4.10)) dan kode nilai  $\theta$  diurutkan dari terkecil hingga terbesar. Sebagai contoh, exp11 berupa list untuk *ultimate ruin probability* dari distribusi Eksponensial dengan parameter  $\beta = \frac{1}{750}$  dan  $\theta = 0,1$ .

##### (a) Distribusi Eksponensial

```
expplot1 = ListLinePlot[{exp11,exp12,exp13}, PlotRange
->{{0,100000},{0,1}}, PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3
", "theta = 0.5"}, PlotStyle -> {{Red, Dashed}, {Blue, Dashed}, {
Purple, Dashed}}, AxesLabel->{"x","y"},PlotLabel->""]

f[x_, theta_, beta_] := 1/(1 + theta) Exp[-(theta*beta*x)/(1 + theta)
]

expplot2 = Plot[{f[x, 0.1, 1/750],f[x, 0.3, 1/750],f[x, 0.5, 1/750]},
{x, 0, 100000}, PlotRange -> All, PlotLegends -> {"theta = 0.1",
"theta = 0.3", "theta = 0.5"},AxesLabel -> {"x", "f(x)"},
PlotStyle -> {{Opacity[0.8]}, {Opacity[0.8]}, {Opacity[0.8]}}]

Show[expplot1,expplot2]
```

```
expplot3 = ListLinePlot[{exp21,exp22,exp23},PlotRange->All,
PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"},
PlotStyle -> {{Red, Dashed}, {Blue, Dashed}, {Purple, Dashed}},
AxesLabel->{"x", "y"},PlotLabel->""]
```

```

expplot4 = Plot[{f[x, 0.1, 1/1000], f[x, 0.3, 1/1000], f[x, 0.5,
  1/1000]}, {x, 0, 100000}, PlotRange -> All, PlotLegends -> {"
  theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}, AxesLabel -> {"x", "f
  (x)"}, PlotStyle -> {{Opacity[0.8]}, {Opacity[0.8]}, {Opacity
  [0.8]}}}

Show[expplot3, expplot4]

```

```

expplot5 = ListLinePlot[{exp31, exp32, exp33}, PlotRange -> All,
  PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"},
  PlotStyle -> {{Red, Dashed}, {Blue, Dashed}, {Purple, Dashed}},
  AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotLabel -> ""]

expplot6 = Plot[{f[x, 0.1, 1/1500], f[x, 0.3, 1/1500], f[x, 0.5,
  1/1500]}, {x, 0, 100000}, PlotRange -> All, PlotLegends -> {"
  theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}, AxesLabel -> {"x", "f
  (x)"}, PlotStyle -> {{Opacity[0.8]}, {Opacity[0.8]}, {Opacity
  [0.8]}}}

Show[expplot5, expplot6]

```

### (b) Distribusi Weibull

```

ListLinePlot[{weib11, weib12, weib13}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"x
  ", "y"}, PlotLabel -> "", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta =
  0.3", "theta = 0.5"}]

```

```

ListLinePlot[{weib21, weib22, weib23}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"x
  ", "y"}, PlotLabel -> "", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta =
  0.3", "theta = 0.5"}]

```

```

ListLinePlot[{weib31, weib32, weib33}, PlotRange
  -> {{0, 100000}, {0, 0.95}}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotLabel -> "",
  PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]

```

```

ListLinePlot[{weib41, weib42, weib43}, PlotRange
  -> {{0, 100000}, {0, 0.95}}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotLabel -> "",
  PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]

```

### (c) Distribusi Lomax

```
ListLinePlot[{lmx11, lmx12, lmx13}, PlotRange->All, AxesLabel->{"x", "y"}, PlotLabel->"", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]
```

```
ListLinePlot[{lmx21, lmx22, lmx23}, PlotRange->All, AxesLabel->{"x", "y"}, PlotLabel->"", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]
```

```
ListLinePlot[{lmx31, lmx32, lmx33}, PlotRange->All, AxesLabel->{"x", "y"}, PlotLabel->"", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]
```

```
ListLinePlot[{lmx41, lmx42, lmx43}, PlotRange->All, AxesLabel->{"x", "y"}, PlotLabel->"", PlotLegends -> {"theta = 0.1", "theta = 0.3", "theta = 0.5"}]
```

Dengan kode yang serupa, dapat diplot pdf, cdf, dan grafik *ultimate ruin probability* dengan data severitas klaim.